EL TEOREMA DE PITÁGORAS

PITÁGORAS

Un secreto encerrado en tres paredes



NATIONAL GEOGRAPHIC

PITÁGORAS DE SAMOS es una de las figuras más fascinantes de la historia de las ideas. A medio camino entre la ciencia y la mística, su visión de un universo armónico y gobernado por los números ha influido poderosamente en toda la cultura occidental. En vida se erigió como líder de una secta política y religiosa —la primera que se conoce— que extendió su influencia por amplias zonas de Grecia. A él se asocia uno de los hallazgos más relevantes de la Antigüedad: la relación de igualdad entre la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo y el cuadrado de su hipotenusa. Un auténtico tesoro geométrico que no sólo tiene incontables aplicaciones prácticas sino que simboliza el nacimiento de las matemáticas como disciplina independiente y rigurosa.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

PITÁGORAS

Un secreto encerrado en tres paredes

NATIONAL GEOGRAPHIC

MARCOS JAÉN SÁNCHEZ es periodista y divulgador. Ha trabajando como guionista de radio y televisión en programas de difusión de la cultura, indistintamente en los ámbitos científico y humanístico. Es colaborador habitual en medios audiovisuales, radiofónicos y escritos.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Luz de la Mora

Infografías: Joan Pejoan

Fotografías: Age Fotostock: 89; Album: 21, 23, 27ad, 31, 32, 87ad, 120, 122, 149, 155; Archivo RBA: 83, 87ai, 111, 125, 132; British Museum: 86; Fyodor Bronnikov/Galería Tretyakov, Moscú: 69a; Leonardo da Vinci/Biblioteca Ambrosiana, Milán: 141ad; Euclides/Universidad de Pensilvania: 53a; Eric Gaba/Museo del Louvre, París: 159; Galilea/Museos Capitolinos, Roma: 27ai; Index: 92; Museo de Bellas Artes de Moscú: 87b; Salvator Rosa/ Kimbell Art Museum, Fort Worth, Texas: 69b; Rafael Sanzio/ Museos Vaticanos, Roma: 27b, 53b; Marie-Lan Nguyen: 51, 67; Gregor Reisch: 141ai; Scala Archives: 43, 141b; Yale Babylonian Collection: 139.

ISBN: 978-84-473-7628-5
Depósito legal: B-4509-2016

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 Realidad y mito de Pitágoras 15

CAPÍTULO 2 El teorema 33

CAPÍTULO 3 La secta de los pitagóricos 61

CAPÍTULO 4 Un universo basado en el número 77

CAPÍTULO 5 La armonía del cosmos 107

CAPÍTULO 6 El fracaso de la aritmética universal 127

CAPÍTULO 7 Pitagóricos y neopitagóricos 145

LECTURAS RECOMENDADAS 163

ÍNDICE 165

Introducción

Los estudios que se han ocupado de Pitágoras se han debatido siempre entre la admiración y la sospecha. Deseosos de mantener pura una visión de la antigua Grecia como origen del pensamiento lógico moderno, a lo largo de los siglos la filosofía, la filología clásica e incluso la historia de la ciencia descartaron como superstición ciertos aspectos del mundo griego. Pero las evidencias que contradecían esa concepción sólida y limpia de una Grecia clásica racionalista existían desde antiguo y asomaban tímidamente en la obra de algunos autores. Poco a poco esa visión alternativa se ha ido abriendo paso y hoy en día es posible perfilar un cuadro mucho más complejo del espacio intelectual que habitaban los antiguos griegos.

El pensamiento de la Grecia arcaica y clásica fue el resultado de una mixtura de elementos que incluía el misticismo y la religión, una combinación difícil de comprender para la mentalidad contemporánea, modelada en la tradición positivista de la Ilustración. Pitágoras de Samos es, sin duda, la muestra más representativa de esa complejidad. Durante largo tiempo, su personalidad ha sido considerada en su dimensión más reducida, la del genio matemático. Desde esa perspectiva, una aproximación con mayor voluntad de detalle arrojaba al curioso a un laberinto de oscuridades y recovecos incómodos. En la actualidad el único acercamiento posible a su figura no puede ignorar ninguna de las capas

que componen su identidad de manera indisociable: Pitágoras mago y matemático, hombre de conocimiento racional e irracional a un mismo tiempo.

La aportación del sabio de Samos se desarrolló en el contexto de la religión griega. La concepción más popular de esta se corresponde con el panteón de dioses que ha llenado de iconos la narrativa occidental. Sin embargo, los dioses olímpicos son solo un estrato posterior; frente a él se sitúa una vertiente más antigua relacionada con lo subterráneo y lo mistérico. Ya desde la época arcaica, los griegos estuvieron en contacto con pueblos como los tracios o los escitas, de cuya tradición chamánica recibieron numerosas influencias. Pitágoras emergió en ese mundo, y extendió su sombra magnífica como hombre religioso imbricado a la vez con el comienzo de la reflexión científica en el mundo griego. La ambivalencia de Pitágoras es la evidencia de que no puede separarse el origen de la filosofía (una palabra cuya propia creación se le atribuye, aunque erróneamente) de la religión griega. Para los griegos, el intelecto tenía inspiración divina. Los poetas y los sabios de la antigua Grecia estaban tan cerca de los dioses como los profetas y los sacerdotes. Pitágoras fue elevado a una categoría divina y, de hecho, es la primera figura de hombre «divino» conocida en el mundo occidental que reunió a su alrededor una secta de seguidores adheridos a su doctrina.

Al contrario de lo que aseguran algunas voces, la existencia real de Pitágoras no ofrece ninguna duda. Su vida se desarrolló aproximadamente entre los años 570 y 490 a.C., e incluso es posible dar por auténticas varias fechas de su biografía. Existen pruebas suficientes de su salto a la esfera pública a los cuarenta años, cuando huyó de Samos —una isla del mar Egeo muy próxima a Asia Menor— para escapar del tirano Polícrates. Alrededor del año 530 a.C. se estableció en la colonia griega de Crotona, en la Magna Grecia, donde organizó una secta religiosa y se involucró de manera activa en la política hasta el punto de expandir su hermandad, y con ella su influencia, por todo el sur de Italia. Ahora bien, en cuanto a su nacimiento, sus viajes y su formación, todo queda dentro del terreno de la leyenda, una leyenda compuesta por los elementos míticos característicos de su mundo y su tiempo.

Es muy difícil reconstruir de manera rigurosa, en el sentido al que estamos acostumbrados en la actualidad, el cuerpo de conocimientos del antiguo pitagorismo, pero a pesar de la densidad de capas que lo caracterizan, la fama del maestro como científico persiste. Algunas tradiciones le consideran el padre de diversas disciplinas del saber, como las matemáticas, la astronomía, la política y la filosofía. Se le atribuyen tantas invenciones en terrenos tan variados del conocimiento, cual verdadero descubridor de la sabiduría humana, que se ha convertido en una suerte de símbolo de la ciencia y el progreso. Su impronta se encuentra no solo en las ciencias, sino también en la música, y después, en la retórica, la adivinación, la medicina y la religión.

Pitágoras adquirió su dimensión filosófica y científica por mediación de Platón y Aristóteles, a través de los cuales ejerció una influencia inconmensurable que se ha prolongado durante toda la historia del pensamiento. El Pitágoras filósofo-científico puede resumirse en dos grandes ideas: la inmortalidad del alma y el concepto de que el universo puede entenderse a través del número y la proporción. Todos los indicios llevan a asociar a Pitágoras con la primera cuestión, de carácter más religioso, y relegan la segunda, más científica, a tiempos posteriores, atribuyéndola a los pitagóricos más notables, Filolao y Arquitas, aunque es posible que el núcleo esencial de esta idea procediera de los primeros tiempos del pitagorismo e incluso que ambas fueran enunciadas por el maestro.

Para Pitágoras, la contemplación, un término originariamente místico, era una actividad intelectual que desembocaba en una forma de pensamiento abstracto puro que hoy conocemos como la ciencia de las matemáticas, y en ella basaba su doctrina teológica, ética y filosófica. Si esta mezcolanza parece extraña, cabe recordar que, en su origen, la mayor parte de las actuales disciplinas científicas estuvieron estrechamente vinculadas a conjuntos de creencias que ya han sido relegadas al estatus de superstición. Por ejemplo, la astronomía estaba asociada a la astrología, y la química, a la alquimia. En su principio, el conocimiento matemático parecía ser seguro, exacto y aplicable a la realidad, y además se adquiría solamente por el pensamiento, sin necesidad de la ob-

servación. Así, los pitagóricos creyeron que proporcionaba un ideal del que el conocimiento empírico estaba muy alejado. Se suponía que el pensamiento era superior a los sentidos, y la intuición, a la observación. Se buscaban métodos diversos para acercarse al ideal matemático, aunque las conclusiones que de ello se extrajeron fueron la fuente de muchos errores tanto en la metafísica como en la teoría del conocimiento.

Pitágoras descubrió la importancia de los números. A él se atribuye la célebre afirmación de que «todo es número». Las propiedades de los números, sobre todo al combinarlos, maravillaron tanto a los pitagóricos que acabaron dedicando la mayor parte de su esfuerzo científico a buscar por todas partes analogías entre los números y las cosas. Fórmulas como $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, que muestra que los cuadrados pueden formarse como sumas de los números impares sucesivos, les parecían pura expresión de lo divino. Así, los pitagóricos se dedicaron a categorizar los números, estableciendo complejas divisiones, e incluso les otorgaron significación moral.

El sabio de Samos imaginaba los números como figuras, del modo en el que aparecen en los dados o los naipes. El pitagorismo se centró en los números oblongos, los triangulares, los piramidales y muchos otros que se irán viendo en las siguientes páginas; se trata de denominaciones relacionadas con los guijarros que se utilizaban para dibujar tales figuras. Probablemente, el maestro consideraba que el mundo estaba compuesto por partículas equivalentes a lo que más tarde se conocería como átomos, y que los cuerpos estaban hechos de esos elementos dispuestos en formas armónicas. De ese modo, la aritmética se convertía en la base y el nexo entre la física y la estética.

Los principios numéricos proporcionaron los cimientos sobre los que Pitágoras configuró su filosofía, una filosofía completa de ámbito universal que empleaba el concepto de armonía, tanto musical como matemática, para hacer danzar toda la realidad, incluso los astros, al son de una música matemática. En la cosmología del sabio de Samos (basada en parte en la de Anaximandro de Mileto, que vivió un siglo antes), los cuerpos celestes estaban distanciados de un llamado «fuego central» según intervalos que corres-

pondían a los de una octava de la escala musical. Por ese motivo, los movimientos circulares de los cuerpos celestes producían una música: la armonía de las esferas. Esta música sobrepasaba la capacidad del oído humano, pero, según la leyenda, Pitágoras era capaz de oírla. Claros vestigios de la relación que estableció el maestro entre la música y la aritmética sobreviven en los términos matemáticos «media armónica» y «progresión armónica».

Pero quizá el descubrimiento más grande de Pitágoras, o de sus discípulos más allegados, fue el celebérrimo teorema geométrico que lleva su nombre. La tradición le atribuye su autoría, aunque fue un resultado al que muchas culturas han llegado de forma independiente. El teorema de Pitágoras es la famosa proposición de los triángulos rectángulos, que establece que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Los egipcios ya sabían que un triángulo cuyos lados son 3, 4 y 5 tiene un ángulo recto, pero quizá los griegos fueron los primeros en observar que $3^2 + 4^2 = 5^2$ y, siguiendo esta idea, los primeros en descubrir una prueba de la proposición general.

Desafortunadamente para los pitagóricos, este teorema condujo al descubrimiento de un tipo de número que daba al traste con su filosofía. Consideremos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos valen 1. Por el teorema, su hipotenusa vale $\sqrt{2}$, un número que no puede representarse mediante ninguna fracción de números enteros. Ello equivale a decir que no hay forma aritméticamente sencilla de determinar cuántas veces el cateto está contenido en la hipotenusa. Los catetos y la hipotenusa de un triángulo de estas características se dice que son inconmensurables entre sí, y como tal son incompatibles con el armonioso universo numérico que predicaba Pitágoras, en que los números se contenían unos a otros de forma exacta y medible. Este hecho convenció a los matemáticos griegos de que la geometría debía establecerse de manera independiente a la aritmética.

La combinación de magia y matemáticas que nació con Pitágoras marcó tanto la filosofía como la religión en la antigua Grecia, en la Edad Media y en los tiempos modernos, hasta Kant. En san Agustín, Tomás de Aquino, Descartes, Spinoza y Leibniz existe una fusión íntima entre religión y razonamiento, entre as-

piración moral y admiración lógica por lo eterno, que procede de Pitágoras y que caracteriza la teología intelectualizada de Europa frente al misticismo de Asia. Por ese motivo, vale la pena intentar hacer una descripción de la figura del sabio de Samos bajo esa luz, en la frontera de la filosofía, la ciencia, la religión y la leyenda. Porque aquello que durante algún tiempo se consideró conflictivo hoy es fuente de claridad, y actualmente, comprender en toda su ambigüedad a este personaje es imprescindible para interpretar de modo correcto el instante más crítico de la historia del pensamiento: su momento fundacional. La lección no solo consiste en aprender a aceptar la ambivalencia y la complejidad, sino en descubrir que esa actitud parece moderna, pero no lo es: bien al contrario, es la experiencia humana original.

570 a.C. Nace Pitágoras en la isla de Samos (Jonia). Jenófanes de Colofón funda en Elea (sur de Italia) una escuela filosófica.

550 a.C. Fecha aproximada del inicio de los viajes de aprendizaje que la tradición atribuye a Pitágoras y que se extienden por diez años.

540 a.C. Algunas tradiciones sitúan hacia esta fecha una pequeña escuela, llamada el Semicírculo, que Pitágoras fundó en Samos para transmitir los saberes adquiridos en sus supuestos viajes.

535 a.C. Polícrates se alza con el poder como tirano de Samos.

530 a.C. Pitágoras abandona su isla natal para establecerse en la colonia griega de Crotona, en la Magna Grecia. Los pitagóricos extienden su influencia por el sur de Italia, formando comunidades en varias ciudades. El auge de Crotona se asocia con el poder político que ostentan los pitagóricos.

510 a.C. Crotona derrota a Síbaris, su ciudad rival. En la misma fecha se sitúa la revuelta antipitagórica que tuvo como consecuencia la caída de la secta.

490 a.C. Posible muerte de Pitágoras en la ciudad de Metaponto, vecina de Crotona, adonde habría huido después de la revuelta.

470 a.C. Nace Filolao de Crotona, que recoge y ordena las doctrinas pitagóricas. Se dice que escribió tres libros que más tarde adquirió Platón.

427 a.C. Platón nace en Atenas.

420 a.C. No más tarde de esta fecha los pitagóricos (quizá Hipaso de Metaponto) ya habían descubierto la existencia de los números inconmensurables.

435 a.C. Nace Arquitas de Tarento, discípulo de Filolao y amigo de Platón, que refundará el pitagorismo en una interpretación estrictamente científica.

387 a.C. Platón funda la Academia. Su obra recoge y reinterpreta los pensamientos centrales del pitagorismo.

384 a.C. Nace Aristóteles, que expondrá y criticará el pitagorismo en el capítulo quinto de la *Metafísica*.

300 a.C. Nace Euclides de Alejandría, que compilará y sistematizará la geometría elemental griega en una obra fundamental para el desarrollo de las matemáticas y la ciencia, los *Elementos de geometría*.

CAPÍTULO 1

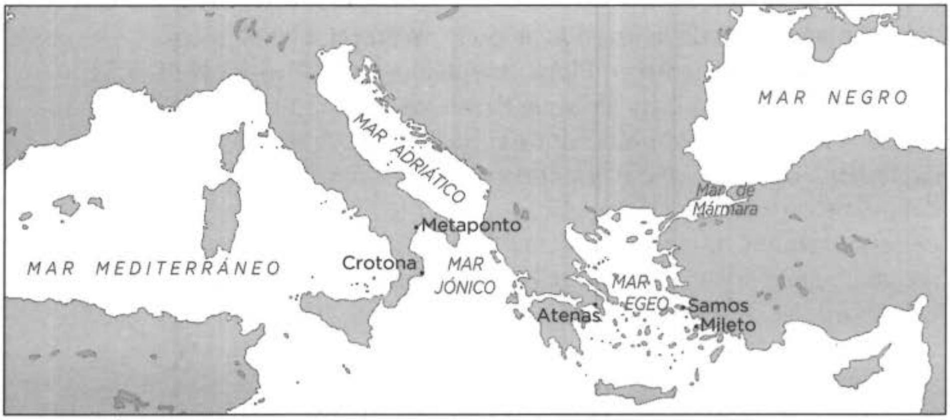
Realidad y mito de Pitágoras

La interpretación histórica de la figura de Pitágoras está velada por el mito. Probablemente la falta de información precisa sobre su vida se deba al secreto que rodeaba a su secta; un vacío que la tradición se encargó de rellenar mediante la fabulación literaria hasta construir un personaje apasionante, si bien indescifrable. A pesar de ello, disponemos de algunos datos que se pueden dar por ciertos y que permiten reconstruir el proceso que convirtió a un filósofo-sacerdote de Samos en el mito mismo de sabio.

La figura de Pitágoras de Samos se encuentra grabada en la conciencia colectiva como el padre de la más exacta de las ciencias, las matemáticas, y de un sinfín de disciplinas más: la música, la medicina, la astronomía, la geometría, incluso la filosofía y la propia palabra que la denomina. Sin embargo, su biografía, o mejor dicho, la multitud de biografías que han llegado hasta nosotros a lo largo del tiempo y que confluyen en el cuerpo tradicional de conocimientos sobre el sabio están repletas de ingredientes legendarios y mágicos.

Los elementos que componen la leyenda de Pitágoras son los habituales de cierta categoría de mito, la del sabio de carácter divino, y la mayoría de ellos se hallan igualmente presentes en las biografías de otros filósofos presocráticos, como Parménides de Elea (ca. 540-470 a.C.) o Empédocles de Agrigento (ca. 495-425 a.C.). Sin embargo, la tradición pitagórica fue añadiendo a este sustrato capas superpuestas hasta convertir a Pitágoras en el prototipo del sabio creador de todo conocimiento humano.

Pitágoras vivió aproximadamente entre los años 570 y 490 a.C. y su vida transcurrió en los extremos del amplio marco geográfico que abarcaba la Grecia antigua: la isla de Samos, en la costa de Asia Menor, y la ciudad de Crotona, en el sur de la península italiana. Aunque también es cierto que estas coordenadas son las mismas que determinan las biografías de otros pensadores



Mapa en el que figuran Atenas, Mileto y las principales ciudades relacionadas con la biografía de Pitágoras: Samos, donde nació; Crotona, donde se desarrolló la parte más pública de su vida, y Metaponto, que la tradición señala como el lugar donde falleció.

mejor referenciados o incluso bien documentados; de hecho, se corresponden exactamente con la zona donde se originó el pensamiento griego antiguo, y, con él, la filosofía. Samos es una ciudad próxima a Mileto, el epicentro de la escuela jónica encabezada por Tales (ca. 624-546 a.C.) y Anaximandro (ca. 610-546 a.C.), y el sur de Italia es el contexto donde floreció la escuela eleática de Parménides y Empédocles. Estos cuatro pensadores, y ambas áreas geográficas, fueron capitales en el desarrollo de la filosofía presocrática.

ORIGEN Y FORMACIÓN

La tradición insiste de modo invariable en que el padre de Pitágoras era un hombre acaudalado llamado Mnesarco, quizá un comerciante, que procedía de la isla de Samos, de una familia que a veces se ha emparentado con el fundador de la colonia, el mítico Anceo. Samos era la rival comercial de Mileto, y las expediciones de sus comerciantes abarcaban todo el Mediterráneo, hasta la región de Tartessos, en el sur de España, una zona famosa por sus minas. El gobernador de Samos era un tirano llamado Polícrates (ca. 570-522 a.C.), que dominó la isla desde 535 a.C. aproximadamente, hasta 515 a.C.

La maquinaria de la leyenda se pone en marcha en el mismo momento del nacimiento de Pitágoras, atribuyéndole un linaje divino. Así, se difundió la idea de que su madre, Pitaida, concibió de Apolo —lo que hace de Mnesarco el padre adoptivo—, y que el nacimiento de aquel niño maravilloso, que haría bien a la humanidad, estuvo profetizado por el oráculo de Delfos. Esta leyenda pretende explicar incluso el nombre del sabio: Pitágoras significaría «anunciado por Apolo», a partir de las palabras *Pythios*, que es el nombre del dios Apolo como patrón de Delfos, y *agoreuo*, «hablar». De hecho, el origen divino es uno de los componentes más elementales del arquetipo heroico, como sucede en los casos de Heracles y Teseo. La infancia del sabio habría estado marcada igualmente por múltiples señales maravillosas de carácter mítico.

La juventud y formación de Pitágoras suponen un motivo de debate enconado incluso en las fuentes tradicionales. Como todo héroe necesita un maestro, la biografía del sabio de Samos recoge como maestros una lista espectacular de grandes nombres de las disciplinas más diversas, lo cual se complementa con otro elemento común a este tipo de aproximaciones míticas: los viajes a países exóticos que son cuna de todo tipo de conocimientos. No hay evidencias de la relación de Pitágoras con sus supuestos mentores ni de muchos de los viajes que se le atribuyen, pero ello permite localizar el origen de las ideas que integrarán el futuro cuerpo de enseñanzas pitagóricas.

Entre sus supuestos maestros destacan los filósofos Tales de Mileto y Anaximandro de Mileto, pero también el místico Ferécides de Siros (ca. siglo VI a.C.), al que se atribuye una de las primeras obras del griego antiguo escritas en prosa. La función de los dos primeros pensadores habría sido introducir al joven Pitágoras en la filosofía jónica, mientras que Ferécides le habría enseñado las nociones de la inmortalidad del alma y la reencarnación. Según la leyenda, Ferécides habría realizado los mismos viajes atribuidos a Pitágoras —los cuales, en realidad, también se han atribuido a la mayoría de los padres del pensamiento griego—, y su figura entremezcla de igual modo la dimensión religiosa y la investigación filosófica. Según numerosas fuentes, Pitágoras cuidó a su maestro en sus últimos días.

En lo que respecta a Tales de Mileto, un personaje polifacético, considerado en la Antigüedad como uno de los Siete Sabios de Grecia, la tradición lo señala como el creador del proceso que dio origen a las matemáticas como ciencia. A él se atribuye el haber calculado la altura de las pirámides a partir de la longitud de su sombra durante un viaje a Egipto que realizó como mercader. Relatos posteriores le conceden varios teoremas; los dos principales, que llevan su nombre y se verán más adelante con mayor detalle, se presentan a continuación:

— Dos triángulos son semejantes cuando coinciden en un lado y sus dos ángulos son adyacentes.

— Todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

A ellos se añaden una serie de teoremas que ya se conocían pero que no habían sido enunciados explícitamente o demostrados, entre los que destacan:

— Todo diámetro divide en dos la superficie del círculo.

— En triángulos isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

El Pitágoras intelectual está plenamente integrado en el ámbito de los denominados «filósofos presocráticos». Es usual considerar este período como el primero de la filosofía griega, comprendiendo bajo su inconfundible nombre todos los pensadores y escuelas filosóficas anteriores a Sócrates. Por lo tanto, este término agrupa a los pioneros del pensamiento lógico en la Grecia arcaica: Tales y Anaximandro, pero también Anaxímenes, Heráclito, Jenófanes, Parménides, Zenón, Empédocles, Anaxágoras, Demócrito..., y en esta lista de grandes nombres el sabio de Samos y la secta de sus seguidores ocupan un lugar de honor. La característica común de los presocráticos es su preocupación por el cosmos y la realidad última, por lo cual este capítulo de la historia del pensamiento humano a menudo es llamado «período cosmológico».

ORFEO



Orfeo en el momento de su muerte a manos de las Ménades. Cerámica griega de mediados del siglo V a.C. (Antikenmuseum, Berlín).

Orfeo es un personaje semilegendario que la tradición presenta como uno de los principales poetas y músicos de la Antigüedad, inventor de la cítara; también se considera que fue él quien perfeccionó la lira al añadirle dos cuerdas. El mito asegura que Orfeo, como músico reputado, acompañó a Jasón y los argonautas en su viaje en busca del vellocino de oro, y que bajó a los infiernos para rescatar de la muerte a su amada Eurídice, lo que logró gracias a su arte musical, aunque el éxito final de la aventura depende del cronista que la narra. Se decía que provenía de Tracia, como Baco, pero hubiera sido más razonable pensar que venía de Creta, pues sus doctrinas contenían muchas ideas propias de Egipto, y fue a través de Creta como Egipto influyó en Grecia. Las versiones más antiguas de su leyenda no destacaban tanto su relación con la música, sino más bien su identidad mixta de sacerdote-filósofo, un reformador, muy en consonancia con la idea contemporánea que se tiene de Pitágoras, de quien algunos autores lo consideran sin más una prefiguración. El orfismo se encuentra en Pitágoras, pero también en Empédocles y en Platón, pues los tres pensadores están conectados por una suerte de correa de transmisión de conocimiento.

Por otra parte, la leyenda atribuye también a Pitágoras una serie de preceptores míticos propios del arquetipo del aprendizaje heroico. Se dice que Orfeo le enseñó los misterios teológicos y cosmológicos, y que los dioses Dioniso o Apolo le dieron sus conocimientos sobre medicina y adivinación. Obviamente, el Pitágoras real no pudo tener contacto con estos personajes ficticios; ahora bien, lo que intenta explicarnos la tradición estableciendo esta correspondencia de ecos alegóricos es que el sabio de Samos

dio sus primeros pasos místicos siguiendo la doctrina religiosa conocida como «orfismo».

El orfismo era una doctrina basada en la mitología. Según una de las diversas versiones del mito, Dioniso fue devorado por los Titanes, salvo el corazón, que fue dado a Zeus por Atenea. Destruidos los Titanes por los rayos de Zeus, los hombres emergieron de las cenizas de aquellos, y Dioniso renació de su corazón, que Zeus se había tragado. Esta resurrección es un elemento fundamental en la doctrina órfica y en sus ritos: por un lado, llevó a la creencia en la transmigración, y por otro, a la abstinencia de la carne. El culto a Dioniso, en su forma original, era salvaje y desenfrenado, y estaba relacionado con lo atávico, lo apasionado. No fue en esta forma como influyó en los filósofos, sino en la versión espiritualizada que le atribuía el mítico poeta Orfeo, quien habría fijado los puntos esenciales de la doctrina en los llamados «himnos órficos», en los que se sustituía la embriaguez física por la mental.

VIAJES DE APRENDIZAJE

Los viajes de aprendizaje por países lejanos y exóticos son un elemento común en el mito del sabio —sea filósofo, científico o legislador— en busca de una educación que comprenda todo tipo de conocimientos. Así, Pitágoras habría visitado los lugares prototípicos del sabio jónico, los cuales tienen como elemento central el orientalismo. Como muchos otros héroes filosóficos, la tradición quiere que Pitágoras viajara a Egipto, Arabia, Fenicia, Judea, Babilonia e incluso la India. Como el mito acostumbra a requerir que cada país sea el hogar de una esfera del conocimiento, que, de algún modo, tenga una correspondencia en el universo mitológico, en esos lugares Pitágoras aprendió geometría, matemáticas y astronomía, y se impregnó de misticismo oriental. En todo caso, parece que la leyenda se esmera en establecer cierto equilibrio entre el conocimiento procedente de culturas exteriores de prestigio y el capital propio del saber griego.

EL ORIGEN DE LAS MATEMÁTICAS



Tablilla babilonia fechada en torno al 2100 a.C. y relacionada con el cálculo de la superficie de un terreno (Museo del Louvre, París).

Los viajes formativos de Pitágoras tuvieron como destino Egipto y Babilonia, las dos cunas de la matemática según reconocían los propios griegos. Esto último no es de extrañar dada la relación existente entre la evolución de la agricultura, que alcanzó en ambas regiones un desarrollo temprano importante, y la necesidad de medir los terrenos y contar las unidades producidas. Desafortunadamente, el conocimiento que se tiene hoy en día sobre las matemáticas de las primeras civilizaciones es muy dispar. De Egipto se tienen solo datos de un período de tiempo muy reducido. El sistema numérico egipcio era decimal, pero no posicional: cada una de las potencias de diez, hasta 10^6, tenía un símbolo propio; los números se formaban colocando sucesivamente los símbolos de sus potencias respectivas. El cálculo de fracciones se reducía al cálculo con fracciones de numerador 1. En cuanto a Mesopotamia, se dispone de datos matemáticos que se extienden en el tiempo, lo que ha permitido analizar su evolución. Destaca el alto nivel de sus técnicas de cálculo, en las que ya se aprecia un modo de proceder genuinamente algebraico. Pero su rasgo más característico es el sistema numérico posicional de base 60. Para formar las 60 cifras se combinaban dos signos cuneiformes, una cuña y un gancho, que representaban la unidad y los múltiplos de 10. No se empleaba la coma, y las fracciones se calculaban dentro del dominio de los números enteros. El mayor problema era el hecho de que en el sistema posicional los lugares no ocupados no quedaban claramente definidos, porque no existía ningún signo para el cero. Más adelante, en tiempo de los persas, las matemáticas babilonias incorporaron un signo de omisión, una suerte de cero.

En el trasfondo histórico del mito se encuentra el influjo de las religiones y los saberes no griegos —que vienen desde tan lejos como el río Indo, pasando por Babilonia—, el cual puede rastrearse en numerosas tradiciones del mundo griego. No se debe olvidar que en aquellos momentos el Imperio persa de Ciro II el

Grande (ca. 600-530 a.C.) se extendía hasta Jonia y llegó a comprender la propia Samos. Por otra parte, son diversos los indicios de contactos de sabios griegos con la India. Además, los viajes formativos entre egipcios, fenicios y caldeos son comunes a varios héroes filosófico-místicos de la Magna Grecia, como Parménides o Zenón de Elea (ca. 490-430 a.C.), que aparecen en diversas fuentes viajando a Egipto para recabar sabiduría divina o el arte de hacer leyes. Varios autores tradicionales refieren que Pitágoras se inició en la religión egipcia, el arte de los jeroglíficos y la interpretación simbólica del conocimiento, que luego adoptaría para sus enseñanzas. Dice Heródoto (484-425 a.C.), contradiciendo a los valedores de Ferécides de Siro, que fue en Egipto donde el sabio aprendió la teoría de la reencarnación.

Sea como fuere, las fuentes más antiguas insisten en la relación de Pitágoras y sus seguidores con el país de los faraones. ¿Pudo ser real este viaje en particular? ¿Pudo ser verdaderamente este el viaje iniciático de Pitágoras? Lo que puede decirse a ciencia cierta es que el país del Nilo despertaba gran interés en la Grecia arcaica, como demuestra el segundo libro de las *Historias* de Heródoto, dedicado por entero a Egipto. Desde muy antiguo, la tierra de los faraones se encontraba instalada en el imaginario mitológico griego como fuente del conocimiento supremo. Los antiguos griegos consideraban a Orfeo el primer griego de muchos tenidos por sabios que viajó a aquel país para conocer las leyes de los dioses y adaptar al mundo heleno los misterios de Osiris bajo la forma de Dioniso. Según algunas fuentes, esos mismos misterios fueron los que estudió Pitágoras en su viaje, y de ellos extrajo las nociones de la inmortalidad del alma y la reencarnación. Los antiguos griegos tenían el convencimiento de que esas ideas procedían del legendario país del Nilo, aunque no era así.

PITÁGORAS PÚBLICO

El Pitágoras histórico, o, como mínimo, históricamente contrastable, adopta cierto aire de realidad poco antes de su salto a la arena

política en la Magna Grecia. Su nombre comienza a brillar entre los años 540 y 522 a.C. Parece ser que en su isla natal Pitágoras ya había fundado una pequeña escuela, llamada el Semicírculo, donde transmitía los saberes que había reunido en sus viajes. La leyenda explica que enseñaba en cuevas, otro ingrediente característico del mito.

En aquel período el gobierno de Samos estaba en manos del tirano Polícrates, quien patrocinaba el arte y embelleció la isla con notables obras públicas. Pero el tirano era un gobernante sin escrúpulos. No en vano su tiranía se considera un ejemplo paradigmático de esta clase de régimen político. Polícrates, que solía emplear su gran flota en actos de piratería, aprovechó que Mileto había sido sometida recientemente por Persia para superarla en el comercio marítimo. Para impedir una mayor expansión de los persas hacia Occidente, se alió con el rey de Egipto, y más tarde, al ver que Persia atacaba el país del Nilo con claras posibilidades de conquistarlo, cambió de bando. Su aportación a la invasión persa de Egipto la hizo con una flota compuesta por sus enemigos políticos; las tripulaciones se amotinaron y volvieron a Samos para derrocarle. Polícrates sofocó esta rebelión, pero no tardó en caer.

Pitágoras vivía en desacuerdo con el gobierno de Polícrates. Las fuentes coinciden en señalar que dejó la isla a la edad de cuarenta años huyendo del tirano. Tras abandonar Samos, Pitágoras arribó a la ciudad griega de Crotona, en la Magna Grecia, hacia el año 530 a.C. Las ciudades-estado griegas del sur de Italia eran entonces tan ricas y prósperas como Samos y Mileto, y además estaban muy lejos de la amenaza de Persia. Sin embargo, cuando Pitágoras llegó a la Magna Grecia, las distintas ciudades griegas de Italia estaban enzarzadas en una lucha permanente y enconada, y Crotona acababa de ser derrotada por Lócrida.

Dicen las fuentes que su llegada causó gran sensación, comparable con la de un dios que viene a instaurar un nuevo culto, como ciertamente así sería, pues Pitágoras no tardó en refundar su escuela, que acabó convirtiéndose en un poderoso grupo de gran influencia política y social. La apariencia noble, el gesto magnífico y el verbo poderoso e irresistible con los que se le presenta en este momento culminante de su vida responden perfectamente

al mito. Las descripciones hablan de un hombre maduro, en la cuarentena, con larga barba y mirada inteligente. La iconografía le otorga también un turbante de estilo oriental, como puede apreciarse en muchas de las representaciones tradicionales. No carece de importancia el hecho de que los testimonios más antiguos describen un Pitágoras con aspecto de hombre santo, mientras que los más recientes introducen el aspecto por el que se le conoce actualmente, el del filósofo, como si una lectura posterior hubiera sepultado la capa original.

Como corresponde a quien se considera también fundador del arte de la retórica, su primera aparición pública ante los habitantes de Crotona «sedujo las almas». El filósofo Jámblico de Calcis (ca. 250-325 d.C.) afirmaba que, gracias a un solo discurso, en la primera y única aparición pública que, según él, hizo Pitágoras a su llegada a Italia, cautivó con sus palabras «a más de dos mil personas, que quedaron tan fuertemente impresionadas que ya no quisieron volver a sus casas». Esta escena llena de drama, el discurso formidable del hombre magnético que aparece ya como semidivino, marca la entrada de Pitágoras en la vida pública, lo que permite establecer comprobaciones históricas, pero a la vez pone en marcha la maquinaria mitológica que le acabará convirtiendo en insondable para la historia. A partir de ese momento la ambivalencia le acompañará siempre, y Pitágoras nadará entre dos aguas: será filósofo y científico, sabio y adivino, legislador y juez.

Pitágoras fundó una secta religiosa y aristocrática que llegó a tener un papel importante en la política de Crotona, y según algunos testimonios, pudo establecer cierto tipo de dominio en numerosas ciudades-estado griegas del sur de Italia. Algunos autores asocian el poder político conseguido por los pitagóricos con el auge de Crotona y lo vinculan con la victoria de esta ciudad sobre la vecina Síbaris, polis también ubicada en el golfo de Tarento. La guerra dejó arrasada aquella población famosa por la entrega a los placeres exquisitos de sus habitantes, los sibaritas, pues los crotoniatas desviaron el río Cratis, que la rodeaba, para inundarla. Si creemos a la tradición, la victoria de Crotona se produjo en la edad madura del maestro, alrededor del 510 a.C.



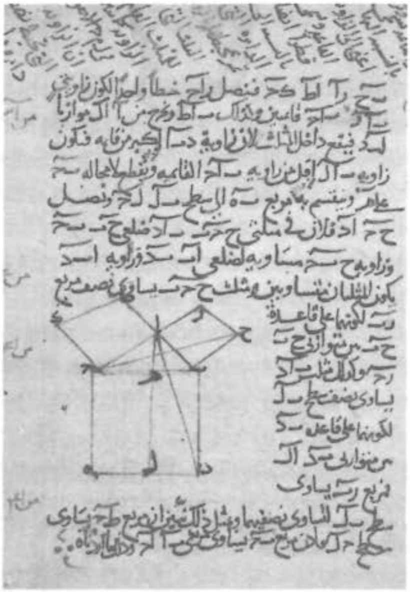




FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
El más famoso busto identificado con Pitágoras es una copia romana de un original griego (Museos Capitolinos, Roma).

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Manuscrito árabe del siglo XIII con la demostración euclídea del teorema de Pitágoras (British Library, Londres).

FOTO INFERIOR:
Detalle de *La escuela de Atenas*, de Rafael; el sabio de Samos es el personaje que aparece escribiendo, a la izquierda (Museos Vaticanos, Roma).

PITÁGORAS REFORMADOR RELIGIOSO

Como recoge el poeta Homero, para los griegos arcaicos el más allá era un lugar gris por el que el alma humana se arrastraba como una sombra. Pero a lo largo del siglo VI a.C. una serie de nuevas doctrinas espirituales fueron sustituyendo esa idea por una concepción de un más allá feliz y luminoso para aquellos que se habían esforzado en mantener ciertas normas de comportamiento y prácticas rituales en el mundo de los vivos. La nueva concepción de la vida después de la muerte procedía de las religiones mistéricas y el pitagorismo, en una síntesis de influencias de otras culturas y de elementos propios de la Grecia antigua.

«¿Qué son las Islas de los Bienaventurados? El Sol y la Luna.»

— MÁXIMA PITAGÓRICA RECOGIDA POR MACROBIO (SIGLO IV D.C.) EN *COMENTARIO AL SUEÑO DE ESCIPIÓN*.

Las evidencias indican que las enseñanzas que el sabio de Samos transmitió en vida a sus seguidores fueron principalmente sus teorías acerca de la inmortalidad del alma, el eterno retorno y la interrelación de todas las cosas. Las doctrinas religiosas de Pitágoras contenían las claves para entender el universo. El mundo había cambiado: se sabía ahora que la Tierra era una esfera y ya no era posible el infierno subterráneo que había cantado Homero, conocido como el Hades, ni tampoco el paraíso localizado en el extremo occidental de las Islas de los Bienaventurados, a donde la tradición enviaba las almas virtuosas para el reposo eterno. El más allá ya no cabía en la Tierra y se imponía una nueva geografía funeraria: el más allá se localizaba ahora en las estrellas, y se declaraba el origen celeste del alma, que terminaría por retornar al cielo.

Así comenzaría la destrucción de la mitología clásica, basada en Homero y Hesíodo. Un largo proceso de erosión había vaciado los mitos y los dioses homéricos de su sentido original. La nueva mitología del alma no podía apoyarse en la tradición homérica, y sirvió de base a Platón. Tal fue la poderosa influencia de la reforma religiosa de Pitágoras.

FINAL DEL HOMBRE, PRINCIPIO DEL MITO

Las fuentes apuntan a que fue hacia el 510 a.C. cuando se produjo una violenta revuelta contra Pitágoras y sus seguidores, y que, paradójicamente, el conflicto con Síbaris —a cuya derrota habían contribuido ampliamente— marcó el principio del fin del pitagorismo. Al parecer, la influencia de Pitágoras y su círculo, que podía derribar ciudades, despertó los celos y el odio de sus conciudadanos. La leyenda habla de un tal Cilón, un crotoniata acaudalado que fue rechazado por el maestro en el seno de la comunidad pitagórica y que azuzó a la población en su contra por despecho. Quizá esta historia sea solo una manera de poner nombre a la tensión social que se dirigió hacia la secta al acabar la guerra con Síbaris. En todo caso, se dispone de suficientes fragmentos de información como para reconstruir el posible curso de los hechos históricos.

Tras la derrota de Síbaris por parte de Crotona se sucedieron los conflictos políticos entre los vencedores para hacerse con el control de los territorios arrebatados. La implicación de los pitagóricos en el proceso, que venía de muy atrás, se puso de manifiesto con mayor intensidad. Fuentes diversas señalan la pugna por la distribución de las tierras como la causa que acabaría desembocando en el estallido de la revuelta antipitagórica. Algún estudioso ha señalado que es posible que los pitagóricos hubieran pasado a detentar cargos públicos y a tomar decisiones políticas en terrenos sensibles, como el reparto de los territorios conquistados, aunque seguramente la situación fue más compleja.

Es conocida la historia sobre la muerte de Pitágoras en la revuelta. La leyenda clásica sostiene que los pitagóricos estaban reunidos por la noche en la casa de un miembro de la hermandad llamado Milón, cuando una turbamulta prendió fuego al edificio. Algunos aseguran que Pitágoras murió en el incendio y otros dan un giro colorista a la historia explicando que huyó del incendio perseguido por sus enemigos, pero entonces halló en medio del camino un campo de habas. Su aversión a la planta, uno de sus tabúes más conocidos, le llevó a dejarse morir a manos de sus perseguidores antes que atravesar el campo.

Varios indicios apuntan a una resolución más razonable del conflicto civil en Crotona y dibujan un cuadro distinto de los últimos años del sabio de Samos: es probable que Pitágoras huyera a la vecina ciudad de Metaponto, donde habría muerto alrededor del año 490 a.C. Ciertamente, en tiempos del romano Marco Tulio Cicerón (106-43 a.C.), los habitantes de Metaponto mostraban la tumba de Pitágoras a quien deseara verla.

CATÁLOGO DE PODERES MÁGICOS

Pitágoras se convirtió pronto en una figura mística a la que se atribuyeron milagros y poderes mágicos. A partir de ese momento, dos tradiciones opuestas —la mítica y la lógica— se disputaron su memoria, haciendo aún más difícil desentrañar la realidad.

La lista de los poderes mágicos del maestro varía en las diferentes biografías hasta componer una maraña de leyendas de todo tipo. Adentrarse en tal madeja es un viaje incómodo para quien prefiera la imagen del Pitágoras científico, pero los milagros pitagóricos, que componen el núcleo más antiguo de su tradición, son imprescindibles para completar una visión contemporánea del personaje.

Se decía que Pitágoras podía aguantar largos períodos de tiempo sin comer ni beber y que podía estar en varios lugares a la vez, como atestiguan las historias que afirman que fue visto a la misma hora en dos ciudades distantes, cada una a un lado del estrecho de Mesina. Otra famosa colección de historias recoge el portento de su muslo de oro, que algunos autores relacionan con su padre mitológico, Apolo, mientras que otros lo vinculan a una iniciación de tipo chamánico.

El don de la palabra es el capítulo milagroso más fecundo de Pitágoras. Por un lado, era adivino: se dice que profetizó terremotos, advirtió de la llegada de un cadáver en un barco y fue capaz de predecir las capturas que recogerían unos pescadores. Su palabra era mágica, e incluso curativa, como afirman las historias sobre auditorios hechizados ante su retórica invencible, o

RELIGIONES MISTÉRICAS

Las religiones mistéricas se desarrollaron de modo extenso en el mundo antiguo, y estuvieron presentes en la Grecia arcaica, en Roma y también en el mundo helénico. Su nombre las caracteriza fácilmente: son aquellas que presentan misterios cuya explicación pública no se plantea jamás, ya sea para proteger a sus sacerdotes y fieles, para favorecer la exclusividad de la vivencia religiosa, etc. Esta clase de cultos pueden clasificarse en dos grupos: las religiones de misterios mágico-religiosos y las religiones de misterios filosóficos. Un ejemplo de las primeras sería Eleusis. A menudo, estas religiones pasaron de ser practicadas por un reducido grupo de iniciados a convertirse en el culto oficial de una ciudad. Algunas procedían de Asia Menor y eran derivaciones de cultos a fenómenos naturales, mientras que otras, las que procedían del sur de Rusia, tenían carácter chamánico. El segundo grupo, formado por las religiones de misterios filosóficos, lo encabeza precisamente el pitagorismo, que en su vertiente más religiosa es llamado a menudo «órfico-pitagorismo». A estas religiones se las considera a veces derivación de las primeras, aunque hay manifestaciones claramente diferenciadas. A la inversa que aquellas, estaban regidas por motivos especulativos más que culturales y, aunque también se desarrollaban entre grupos de iniciados, tenían tendencia a propagarse en otros círculos de ideas similares.



Relieve votivo vinculado a los misterios de Eleusis en el que aparecen Deméter, Perséfone y Triptolemo; obra del siglo IV a.C. (Museo Arqueológico, Atenas).

sobre sus logros en la sanación de cuerpos y almas a través de la poesía y la música. Las leyendas más exageradas le presentan curando la peste. Su verbo también tenía una propiedad conciliadora que le convertía en el caudillo perfecto, capaz de hacer prevalecer la concordia, la libertad y la excelencia de las leyes.

CHAMANISMO Y RELIGIÓN

El chamanismo está considerado como el antecedente de todas las religiones organizadas, ya que se han hallado evidencias de prácticas chamánicas anteriores al Neolítico. Muchos de sus aspectos originales se mantuvieron a lo largo del tiempo en el trasfondo de numerosas religiones, por lo general en sus prácticas místicas y simbólicas. El paganismo griego recibió una fuerte influencia chamánica que se refleja en muchos de sus mitos y, sobre todo, en los misterios. Y a través de Grecia alcanzó también la religión romana. Las creencias y prácticas tradicionales de tipo chamánico se preocupaban por la comunicación con el mundo de los espíritus y de los dioses. El chamán tenía la facultad de curar, de comunicarse con las deidades y los espíritus y de ver el futuro, y además era el depositario de la sabiduría de la comunidad.



Espejo grabado con la figura de Calcante, adivino griego que extrae sus profecías examinando las vísceras de los animales; pieza del siglo v a.C. (Museos Vaticanos, Roma).

Según los relatos más fantasiosos, Pitágoras recordaba sus vidas pasadas con todas sus experiencias. Decía haber sido el rey Midas y el héroe mítico Euforbo, hijo de Pántoo, en la época de la guerra de Troya, así como algunos otros personajes, entre los cuales había comerciantes y cortesanas. No temía a la muerte y la consideraba respecto a la vida como el sueño es a la vigilia, pues él mismo había realizado el descenso al Hades, la catábasis que se refiere en tantos mitos. En su viaje a los infiernos, según Jerónimo de Rodas, vio las almas de Homero y Hesíodo, que expiaban todo lo malo que habían cantado acerca de los dioses.

CAPÍTULO 2

El teorema

El teorema de Pitágoras es uno de los resultados matemáticos con mayor presencia en la historia de la cultura. Aunque se atribuye al sabio de Samos, son conocidos sus antecedentes en las más importantes civilizaciones orientales de la Antigüedad. Pero no se puede arrebatar a los geómetras griegos su genialidad: suyo es el mérito del salto de lo concreto a lo general, de la observación puntual al teorema.

Si en el imaginario popular se suele identificar automáticamente a Pitágoras con la figura del matemático por antonomasia, otro tanto puede decirse del teorema que lleva su nombre: es, sin duda, el resultado matemático más famoso del planeta. Sin embargo, su enunciado exacto es bastante menos conocido, a pesar de que se estudia de manera generalizada en las escuelas de todo el mundo, y se suele saber aún menos para qué sirve en realidad.

La pregunta sobre su utilidad se responde con rapidez. El teorema de Pitágoras es la solución a un problema clásico de geometría de enorme impacto teórico. Así, más que en sus aplicaciones prácticas, su importancia estriba en que es la base de multitud de teoremas matemáticos, de trigonometría y de geometría analítica, y, por supuesto, en que resulta vital para la aparición y el desarrollo de las raíces cuadradas. Como veremos, las raíces de números aparecen en problemas geométricos muy simples, como por ejemplo el cálculo de las diagonales de cuadrados y rectángulos a partir de los lados.

Quizá buena parte de su influencia y de la atención que ha recibido se deba a la extrañeza que causa su análisis. A diferencia de otros teoremas, no existe ninguna razón intuitiva que explique sus propiedades, que ahora repasaremos, y comprenderlo es un acto de pura deducción lógica. Por este motivo, algunos autores lo consideran el paradigma de las matemáticas.

ENUNCIADO DEL TEOREMA

El mayor descubrimiento que la tradición atribuye a Pitágoras es la proposición de los triángulos rectángulos, que establece la relación entre los catetos y la hipotenusa. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados del triángulo (figura 1). El enunciado se suele resumir con la fórmula «la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa», cuya expresión matemática sería:

$$a^2+b^2=c^2.$$

El teorema también puede expresarse de modo más riguroso desde el punto de vista de las matemáticas actuales. Su enunciado en términos geométricos especializados es el siguiente (figura 2):

> Dado un triángulo de vértices *ABC*, el ángulo *C* es recto (triángulo rectángulo) si y solo si el área del cuadrado sobre el lado *c*, opuesto a *C*, es la suma de las áreas de los cuadrados sobre los otros lados *a* y *b*: $a^2+b^2=c^2$.

CATETOS, HIPOTENUSA Y ÁNGULOS

Los catetos son los lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo, y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto de ese triángulo. Las palabras que dan nombre a estos lados provienen del griego. Cateto tiene su origen en el término *kathetos*, que deriva de *cotos* (recto o conforme) y significa «perpendicular». Hipotenusa proviene de *upoteinousa*, que significa «la línea que subtiende o sostiene». La definición supone que la hipotenusa es el diámetro de una circunferencia en la que se encuentra el vértice recto del triángulo rectángulo, es decir, el diámetro subtiende el ángulo recto. Por lo que concierne a los ángulos, probablemente el concepto surgió de la observación de las posiciones que puede formar el muslo y la pierna de una persona, o su brazo y antebrazo.

De la ecuación $a^2+b^2=c^2$ se deducen tres corolarios de aplicación práctica:

$$a=\sqrt{c^2-b^2},$$
$$b=\sqrt{c^2-a^2},$$
$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

FIG. 1

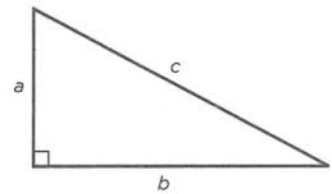
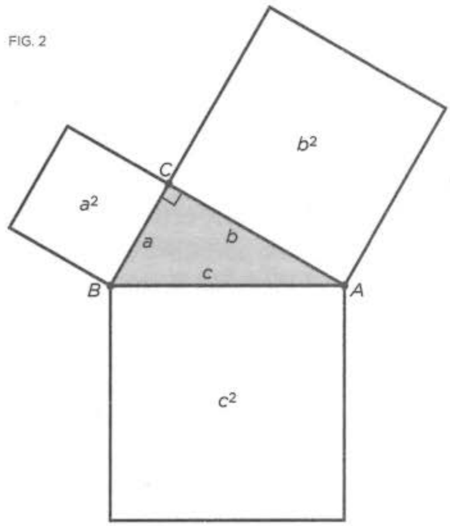


FIG. 2



En tiempos de Pitágoras el teorema tenía un uso práctico inmediato y muy claro, el cual se desprende de la primera y más esencial de sus propiedades: servía para determinar perpendicularidades. En efecto, en un triángulo rectángulo «el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos» porque los catetos son perpendiculares. Y, por otra parte, si se da esa relación ($a^2+b^2=c^2$), entonces se puede deducir que el triángulo es rectángulo.

Hoy en día, la escuadra y el cartabón que se emplean en el dibujo técnico permiten trazar segmentos perpendiculares, y muchos otros si se combinan los ángulos de 30°, 45°, 60° y 90°. En el mundo real, el diseño de la escuadra de carpintero permite verificar directamente la perpendicularidad a partir del propio instrumento. En la antigua Grecia, un arquitecto que tuviera la necesidad de comprobar si dos paredes eran perpendiculares, disponía del teorema de Pitágoras. En aquella época el instrumento que se empleaba para medir longitudes era una cuerda repleta de nudos equidistantes; con ella, el arquitecto marcaba 3 unidades en una pared y 4 en la otra: las paredes demostraban ser perpendiculares siempre que hubiera 5 unidades entre los extremos marcados ($5^2=3^2+4^2$). De este modo,

un problema de medición de ángulos, que siempre resultaba difícil, se reducía convenientemente a la verificación de una relación entre longitudes, lo cual era mucho más fácil.

ANTECEDENTES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Los egipcios y los babilonios ya sabían que un triángulo cuyos lados son 3, 4, 5, tiene un ángulo recto, pero parece que los griegos pudieron ser los primeros en observar que $3^2+4^2=5^2$ y, por tanto, los primeros en descubrir una instancia de la proposición general. Por su parte, las milenarias culturas china e india descubrieron también muy pronto esta genuina propiedad geométrica. De hecho, el problema de las diagonales de cuadrados aparece en todas las culturas con cierto grado de desarrollo. Sin embargo, las evidencias actuales indican que era desconocido en las grandes civilizaciones precolombinas, y, excepto en Egipto, también en las culturas del continente africano. En cualquier caso, se puede conceder a Pitágoras, o a alguno de sus discípulos más allegados, el mérito de notar la validez de esta relación en todos los triángulos rectángulos posibles.

TERNAS PITAGÓRICAS EN BABILONIA

Mucho antes de que Pitágoras enunciara la ley general de los triángulos rectángulos, la Babilonia de la época de Hammurabi —monarca que falleció en torno al año 1750 a.C.— ya sabía cómo calcular ternas pitagóricas. Las ternas pitagóricas son combinaciones de números positivos (a, b, c), tales que $a^2+b^2=c^2$. Algunos ejemplos son (3, 4, 5), (5, 12, 13) y (8, 15, 17). Por el teorema de Pitágoras, cada una de estas ternas representa un triángulo rectángulo con lados de longitud entera.

La principal fuente de información que tenemos sobre Babilonia, y sobre Mesopotamia en general, son las célebres tablillas de arcilla con escritura cuneiforme, cuyos textos se escribían

cuando el material aún estaba blando, y a continuación se cocían en hornos o se endurecían al sol, lo que ha garantizado su buena conservación. De entre todas ellas, las piezas datadas hacia el año 2000 a.C. son las más importantes para la historia de las matemáticas. La lengua y la escritura utilizadas en las tablillas del período más antiguo es el acadio, que sustituyó al sumerio. Las palabras de la lengua acadia consisten en una o más sílabas, y cada sílaba está representada por un grupo de pequeños segmentos rectilíneos. Los acadios utilizaban para escribir un estilete de sección triangular que apoyaban sobre la tablilla en una posición inclinada, produciendo así unas señales en forma de cuña orientadas en distintas direcciones; de ahí procede la denominación de escritura «cuneiforme».

Entre las 300 tablillas babilónicas que presentan contenido matemático —de un total de medio millón de tablillas descubiertas hasta el momento—, destaca una pieza designada como tablilla Plimpton 322 (la tablilla número 322 de la colección del editor George Arthur Plimpton, cedida en 1936 a la Universidad de Columbia). La pieza pertenece al período antiguo de la dinastía de Hammurabi (que aproximadamente abarca el período comprendido entre los años 1800 y 1600 a.C.) y muestra una tabla con cuatro columnas repletas de caracteres que parecen ser números escritos en el sistema de numeración babilonio, de base 60.

Sus columnas de números apretados pueden confundirse con un registro de transacciones comerciales, pero un estudio atento ha revelado algo realmente extraordinario: son una lista de ternas pitagóricas $a^2+b^2=c^2$. De este modo, la tablilla Plimpton demuestra que los babilonios estaban familiarizados con la geometría elemental y los procedimientos algebraicos.

¿Cómo dieron los babilonios con las ternas pitagóricas? ¿Por qué estaban interesados en estos números? Para componer lo que podría considerarse como la primera tabla trigonométrica de la historia, debían de conocer un algoritmo de creación de ternas que todavía dormiría 1500 años hasta ser formalizado por Euclides en sus *Elementos*.

La tabla de la página siguiente muestra 15 de las 38 ternas pitagóricas de la tablilla. Incluso habiendo descifrado los carac-

I.	II. *b*	III. *d*	IV.	*l*
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2 00
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1 [1 20 25]	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20 00
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45 00
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6 00
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45 00
(1) 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8	16 00
(1) 38 33 36 36	9 01 [8 01]	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 48 00
(1) 33 45	45	1 15	11	1 00
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40 00
(1) 27 00 03 45	7 12 1 [2 41]	4 49	13	4 00
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45 00
(1) 23 13 46 40	56	53 [1 46]	15	1 30

teres cuneiformes, se hacen precisas algunas explicaciones para entenderla. La columna IV contiene el orden de las filas. Las columnas II y III dan los valores en base 60 de la hipotenusa y de un cateto de un triángulo rectángulo. En la última columna, identificada como *l*, se especifican los valores del otro cateto. La primera columna encierra una pequeña maravilla, pues da los cuadrados de las razones de *d* dividido por *l*. Hoy en día ese resultado podría describirse como el cuadrado de una función trigonométrica.

A modo de ejemplo, vamos a revisar la fila 1 de la tabla babilónica, usando nuestros numerales y la base 10. En la columna II aparece el cateto $b = 119$ (expresado en base 60 como 1 59), y en la columna III, la hipotenusa $d = 169$ (expresado como 2 49). De ellos resulta el otro cateto, $l = 120$ (2 00). La siguiente tabla en base 10 presenta los valores convertidos y permite comprobar la validez de las relaciones:

Posición	*l*	*b*	*d*
1	120	119	169
2	3456	3367	4825
3	4800	4601	6649
4	13500	12709	18541
5	72	65	97
6	360	319	481
7	2700	2291	3541
8	960	799	1249
9	600	481	769
10	6480	4961	8161
11	60	45	75
12	2400	1679	2929
13	240	161	289
14	2700	1771	3229
15	90	56	106

AGRIMENSURA EN EGIPTO

Las matemáticas egipcias estaban menos desarrolladas que las mesopotámicas. Los conocimientos que hoy poseemos de ellas provienen de cinco papiros que abordan cuestiones matemáticas, de los cuales los más importantes son el papiro Rhind, descubierto

en 1858 por el egiptólogo escocés Alexander Henry Rhind (1833-1863), y en la actualidad conservado en el Museo Británico, y el papiro de Moscú, que se conserva en el Museo Pushkin de la capital rusa. Estos dos documentos datan probablemente del siglo XVIII a.C., aunque podrían ser más antiguos. Ambos revisten una importancia enorme para los historiadores de las matemáticas, siendo muy significativo que los dos carezcan de indicio alguno sobre el teorema de Pitágoras o las ternas pitagóricas.

De todos modos, los egipcios sabían que los triángulos de lados 3, 4, 5 (o los triángulos proporcionales) eran rectángulos y hacían un uso práctico de esta idea a la hora de trazar dos líneas perpendiculares. De hecho, al triángulo 3, 4, 5 se le llama justamente *triángulo egipcio*. Heródoto, entre otros cronistas, recoge su utilización cuando refiere el trabajo de los agrimensores tras los movimientos de tierras que producían las crecidas del Nilo. En cuanto a la arquitectura, está bien documentado, por ejemplo, el uso del triángulo egipcio en la construcción de la gran pirámide de Kefrén, datada en el siglo XXVI a.C.

La mención explícita de la relación pitagórica aparece en Egipto en varios casos numéricos concretos, si bien no ha perdurado ningún documento que la exponga de forma general. Por ejemplo, en un documento de la XII dinastía (hacia el año 2000 a.C.), encontrado en Kahun, se utiliza la expresión

$$1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(1+\frac{1}{4}\right)^2,$$

que es proporcional a la del triángulo egipcio.

También en los papiros de Berlín —una serie de documentos médicos, literarios y matemáticos del Imperio Medio— se encuentran lo que podrían ser rastros del teorema pitagórico. En uno de sus papiros matemáticos se resuelve un sistema de ecuaciones con dos incógnitas en relación al siguiente problema:

> Te dicen que el área de un cuadrado de 100 codos cuadrados es igual a la suma de la de otros dos cuadrados más pequeños. El lado de uno de ellos es 1/2 + 1/4 del otro. Averigua los lados de los cuadrados.

LA TRIANGULACIÓN EN LA AGRIMENSURA

Los agrimensores egipcios eran sacerdotes y su actividad de cálculo sobre el terreno tenía una consideración prácticamente mística y despertaba el respeto reverencial de los campesinos. El instrumento con el que ejecutaban su «magia» no era otro que la trigonometría. Las primeras culturas con interés por la geometría desarrollaron la trigonometría por sus aplicaciones en arquitectura y agrimensura. La división de terrenos en triángulos (triangulación) fue desde siempre el método esencial para calcular superficies, y el desarrollo de la topografía actual ha demostrado su eficiencia. Todo triángulo se puede dividir siempre en dos triángulos rectángulos, y estos permiten determinar alturas o distancias inaccesibles a partir de las medidas de algunos lados y algunos ángulos. Observando atentamente tales figuras y cotejándolas con las definiciones de seno, coseno y tangente (véase la página 55), se constatan propiedades muy útiles. Por ejemplo, $b = a \tan B$. Es decir que, si se calcula el ángulo B y se tiene el valor de a, gracias a las tablas trigonométricas se puede saber cuánto vale el lado b. Este recurso permite realizar todo tipo de mediciones técnicas, con la ayuda de cintas métricas y teodolitos (un instrumento de precisión que mide ángulos en sus planos respectivos) que proporcionan de manera más precisa longitudes y ángulos.



Grabado inglés de principios del siglo XVII dedicado a la medición de la distancia a un objeto inaccesible mediante la triangulación.

En lenguaje algebraico actual, este problema equivale a resolver el siguiente sistema:

$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$y = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{4}\right)x,$$

lo que implica, tal y como aparece en el papiro, realizar una sustitución y calcular una raíz cuadrada. Este es un planteamiento de tipo pitagórico, pero más que sugerir cierto conocimiento del teorema de Pitágoras, apunta a una familiaridad con métodos de solución de ecuaciones de segundo grado, lo que tampoco está mal para los antiguos egipcios.

PITÁGORAS EN LA INDIA

En la India también se desarrollaron conocimientos aritmético-geométricos relacionados con el teorema de Pitágoras como resultado de la planificación de templos y la construcción de altares. Entre los siglos VIII y II a.C., el saber sobre este campo se fue concentrando en un cuerpo de doctrina conocido con el nombre de *Sulvasutra*. *Sulva* es un término que se refiere a las cuerdas utilizadas para hacer mediciones, y *Sutra* es un libro de reglas o aforismos relativos a un determinado ritual o a una ciencia, por lo que el título viene a significar *Manual de las reglas de la cuerda*.

Los *Sulvasutra* indios eran una suerte de manuales en los que se detallaban prescripciones para la construcción ritual de altares de forma y tamaño determinados, los más interesantes de los cuales son los de Baudhayana y Apastamba, que se remontan al siglo V a.C. En estos libros se describe el uso de la cuerda no solo para medir, sino también para el trazado de líneas perpendiculares, por medio de ternas de cuerdas cuyas longitudes constituyen ternas pitagóricas (por ejemplo, 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25). Para este fin se utilizaba sobre todo el triángulo de lados 15, 36, 39 (derivado del triángulo de lados 5, 12, 13, llamado el «triángulo indio»).

Resulta difícil valorar la originalidad de los conocimientos sobre el teorema de Pitágoras en la India. Por un lado, aquella venerable cultura compartió con Egipto la figura del tensador de la cuerda, y por otro, todas las ternas que aparecen en los *Sulvasutra* se pueden derivar fácilmente de la vieja regla babilónica para construirlas, lo que sugiere una transferencia de conocimiento de origen mesopotámico en dirección al río Indo.

POESÍA Y MATEMÁTICAS EN CHINA

En China, el teorema de Pitágoras se conoce como *Kon Ku* y aparece por primera vez en el tratado matemático *Chou Pei Suan Ching*, que podría traducirse de modo aproximado como *El clásico de la aritmética sobre el gnomon*. La datación de esta obra es discutida, aunque se acepta mayoritariamente que fue escrita entre los años 500 y 300 a.C., y en general se considera que Pitágoras no la conoció. El *Chou Pei Suan Ching* es una recopilación de conocimientos de épocas muy anteriores y fue considerablemente ampliado en el siglo III d.C. por dos insignes matemáticos, Zhao Shuang y Liu Hui. Afortunadamente es posible diferenciar los contenidos más antiguos de los añadidos posteriores. En lo tocante al teorema de Pitágoras, este tratado matemático describe aspectos primitivos, es decir, resultados numéricos concretos, así como las leyes generales de formación de las ternas pitagóricas.

El *Chou Pei Suan Ching* contiene una mención sobre los triángulos rectángulos en la que destaca la descripción de una figura llamada el *diagrama de la hipotenusa*, que no es otra que una demostración visual del teorema de Pitágoras, para un triángulo de $a=3$, $b=4$ y $c=5$. Esta elegante prueba construye un cuadrado de lado $(a+b)$ que se parte en cuatro triángulos de base a y altura b, y un cuadrado de lado c (figura 3, en la página siguiente). Es muy posible que se trate de un añadido posterior a Pitágoras, pero aun así, vale la pena prestarle atención.

Sea el triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c. Se trata de demostrar que el área del cuadrado de lado c es igual a la

suma de las áreas de los cuadrados de lado a y lado b. Es decir, $a^2+b^2=c^2$.

Si se añaden tres triángulos iguales al original dentro del cuadrado de lado c (figura 4), se obtiene un cuadrado de menor tamaño en el centro. Se puede comprobar que el cuadrado resultante tiene en efecto un lado $b-a$. Por tanto, el área de este cuadrado menor puede expresarse como $(b-a)^2=b^2-2ab+a^2$, puesto que $(b-a)^2=(a-b)^2$.

El área del cuadrado de lado c es la suma del área de los cuatro triángulos de altura a y base b que están dentro de él, más el área del cuadrado menor, con lo cual queda demostrado el teorema:

$$c^2=4\left(\frac{ab}{2}\right)+a^2-2ab+b^2=a^2+b^2.$$

El *Chou Pei Suan Ching* contiene también una hermosa demostración mediante una simple traslación de piezas (figura 5).

El segundo tratado clásico chino de contenido matemático en el que se relacionan aspectos geométricos vinculados al teorema de Pitágoras está fe-

FIG. 3

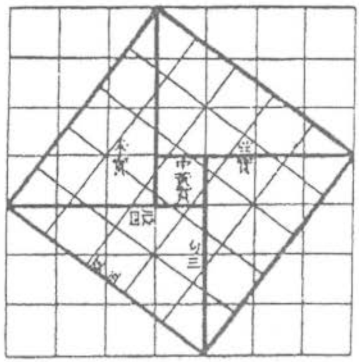


FIG. 4

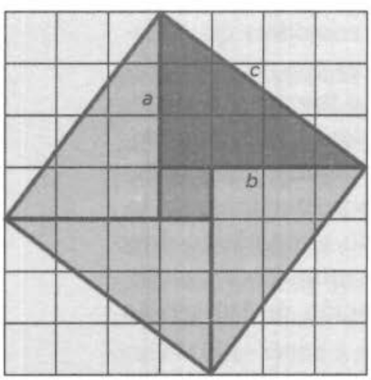
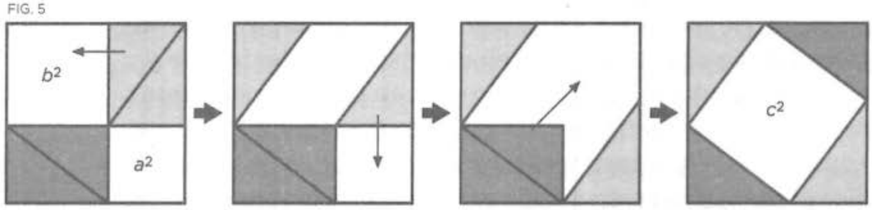


FIG. 5



chado en torno al año 250 a.C., aunque Liu Hui lo comentó y reeditó también en el 263 d.C. Es el *Chui Chang Suang Shu*, o *Los nueve capítulos del arte matemático*. El noveno y último capítulo está centrado íntegramente en los triángulos rectángulos y presenta 24 problemas cuyas soluciones se basan de maneras distintas en el teorema de Pitágoras. El más conocido es el problema del bambú roto, que presenta el problema de manera figurativa, convirtiendo el triángulo rectángulo en una caña de bambú partida a cierta altura que se debe calcular:

> Hay un bambú de diez pies de altura que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura.

Este problema combina el teorema de Pitágoras con la resolución de ecuaciones cuadráticas, pues exige resolver la ecuación $x^2 + 3^2 = (10 - x)^2$.

PITÁGORAS: LAS DEMOSTRACIONES TRADICIONALES

Como Pitágoras no dejó nada escrito, no existe ninguna demostración del teorema que pueda considerarse de su mano. El resultado asoma en diversas fuentes de la tradición griega, que le adjudican las demostraciones que se verán a continuación, hasta fijarse finalmente con detalle en el libro de geometría más importante de la historia de Occidente, los *Elementos* del griego Euclides. Con todo, no se puede arrebatar a Pitágoras, o a sus seguidores, su parte de genialidad, pues ellos fueron quienes lograron dar el gran salto de lo concreto a lo general, quienes establecieron un esquema teórico aplicable en todos los casos.

La primera demostración del teorema que la tradición establece como propia de Pitágoras en persona es una prueba empírica. Se compone un triángulo rectángulo de lados a, b, c (catetos e hipotenusa), que en realidad son los lados de tres cuadrados previamente existentes, según las reglas de la estricta geometría griega (figura 6).

FIG. 6

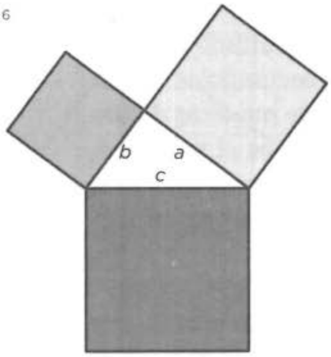


FIG. 7

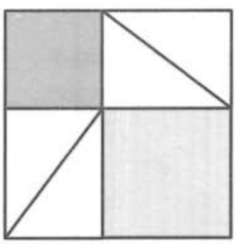


FIG. 8

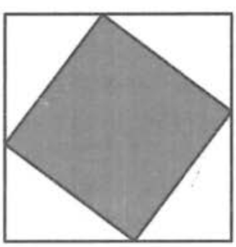
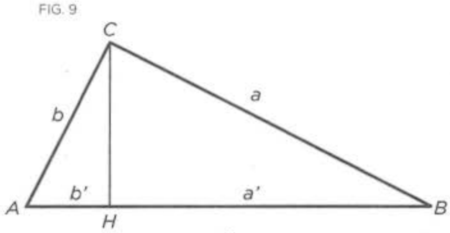


FIG. 9



Con estos cuadrados se construyen dos cuadrados diferentes. El primero está formado por los cuadrados de los catetos, más cuatro triángulos rectángulos iguales al triángulo inicial (figura 7). El segundo está formado por los mismos cuatro triángulos y el cuadrado de la hipotenusa (figura 8).

Si a cada uno de estos cuadrados le quitamos los triángulos, el área del cuadrado central (c^2) equivaldrá al área de los dos cuadrados que componen la figura 8 (b^2+a^2), y de ese modo se demuestra el enunciado directo del teorema de Pitágoras.

Frente a esta demostración gráfica, que se basa en la propia teoría de las proporciones de Pitágoras —una teoría imperfecta, pues se aplica solo a cantidades conmensurables—, algunos historiadores de las matemáticas han contrapuesto otra prueba de carácter numérico. Pitágoras pudo demostrar el teorema mediante semejanza de triángulos —en la figura 9, *ABC*, *ACH* y *CBH*—, puesto que sus lados homólogos son proporcionales.

Sea el triángulo *ABC* rectángulo en *C*; el segmento *CH* es la altura relativa a la hipotenusa, en la que determina los segmentos a' y b', proyecciones en ella de los catetos a y b, respectivamente. Los triángulos rectángulos *ABC*, *ACH* y *CBH* tienen sus tres bases iguales: todos

PRUEBA DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Puede probarse la semejanza de triángulos a través de dos métodos:

- Prueba de la semejanza entre *ABC* y *ACH*: dos triángulos son semejantes si hay dos o más ángulos congruentes (como aparece en Euclides):

$$\frac{b}{b'}=\frac{c}{b}$$

$$b^2 = b'c.$$

- Prueba de la semejanza entre *ABC* y *CBH*:

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{a}$$

$$a^2 = a'c,$$

de donde se obtiene el llamado teorema del cateto. Sumando:

$$a^2 + b^2 = a'c + b'c = c(a' + b'),$$

pero $(a'+b')=c$, por lo que finalmente resulta:

$$a^2+b^2=c^2.$$

tienen dos bases en común, y los ángulos agudos son iguales por ser comunes y por tener sus lados perpendiculares. Por tanto, dichos triángulos son semejantes.

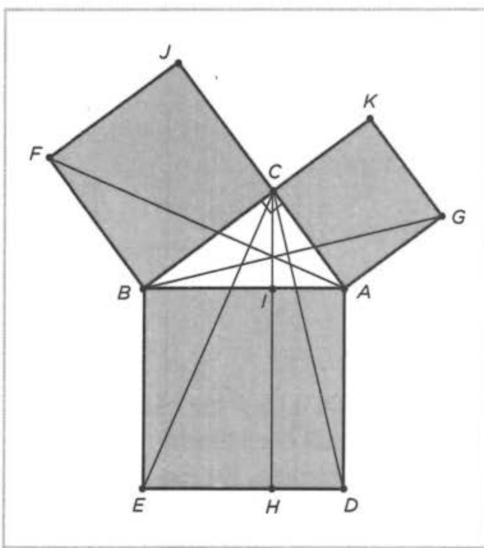
LOS «ELEMENTOS» DE EUCLIDES

Euclides vivió en Alejandría alrededor del año 300 a.C. y fue el autor de los *Elementos de geometría (Stoicheia)*, una obra fundamental para el desarrollo de la matemática y de la ciencia. En ella se sintetiza el conocimiento geométrico de la época, amén de demostraciones propias, con el máximo rigor y enorme elegancia,

deduciendo de forma lógica todos los teoremas a partir de definiciones, postulados y nociones comunes. La obra no supone solo un compendio brillante, sino que añade una gran labor de estructuración del pensamiento geométrico. Quizá por ello hasta hace unas décadas seguía siendo el referente fundamental en el aprendizaje de la geometría. Solo superada por la Biblia, los *Elementos* es la obra que más ediciones y traducciones ha tenido, tanto en copias anteriores a la imprenta como, con más de mil ediciones posteriores, en forma impresa.

Los *Elementos* están estructurados en trece libros. Los cuatro primeros se dedican a la geometría plana básica: la congruencia de triángulos, la igualdad de áreas, la proporción áurea, el círculo, los polígonos regulares, algunas cuadraturas y, cómo no, el teorema de Pitágoras (Libro I, Proposición 47). Así, la propiedad pitagórica se sitúa en un contexto geométrico de áreas de figuras. Pitágoras reaparece en el Libro VI en relación con las proporciones y también en el Libro X, en el que se tratan las raíces cuadradas.

En la proposición 47, Euclides afirma que en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman La expresión visual de esta proposición se conoce con el nombre de «molino de viento» (véase la figura).



La demostración se lleva a cabo por medio de áreas. Consiste en establecer que los triángulos *BFA* y *BCE* son isométricos y que el doble de su área es igual por un lado al área del cuadrado *CBFJ* y por otro al área del rectángulo *BIHE*. Del mismo modo, el cuadrado *CKGA* tiene igual área que el rectángulo *AIHD*. De ello se deduce el teorema de Pitágoras, que puede enunciarse así: el área del cuadrado *BADE* es igual a la suma de los cuadrados *CBFJ* y *CAGK*.

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA



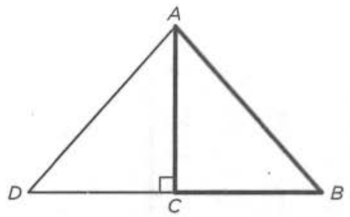
Euclides y la geometría aparecen representados en uno de los relieves realizados por Andrea Pisano en el siglo XIV (Museo dell'Opera del Duomo, Florencia).

Euclides está considerado el padre de la geometría. Aunque probablemente ninguno de los resultados de los *Elementos* sea original del matemático griego, sin duda a él se deben la organización del contenido y su exposición. De su vida se sabe poco más de lo que menciona el filósofo Proclo (siglo V d.C.) en sus comentarios al Libro I de los *Elementos*. Proclo asegura que el geómetra nació alrededor del 325 a.C., vivió y enseñó en Alejandría y murió en torno al año 265 a.C. Dice también, y parece muy probable que así fuera a juzgar por la naturaleza de su obra, que pudo educarse en la Academia de Platón o con discípulos del maestro. De este modo, Euclides habría vivido durante el período helenístico; sin embargo, lo más usual es situar su obra en la Grecia clásica, ya que sus libros refieren lo producido en aquella época anterior. Así, Euclides estructuró los descubrimientos dispares de los griegos clásicos, como puede comprobarse comparando sus libros con trabajos más antiguos. El mismo Proclo explica que reunió aportaciones del filósofo y matemático Eudoxo (ca. 390-337 a.C.) en relación a la teoría de la proporción y del también matemático Teeteto (ca. 417-369 a.C.) respecto a los poliedros regulares, y que, en general, proporcionó demostraciones irrefutables de numerosos resultados insuficientemente demostrados por sus predecesores. No se dispone de manuscritos de su mano, por lo que sus textos han tenido que ser reconstruidos a partir de los comentarios y notas de autores posteriores, sobre todo códices bizantinos y traducciones latinas y árabes.

El teorema también muestra cómo obtener un cuadrado cuya área sea igual a la suma de dos cuadrados dados, es decir, cómo hallar x tal que $x^2 = a^2 + b^2$, siendo así otro ejemplo de álgebra geométrica.

Si la proposición 47 supone el momento culminante del primer libro de los *Elementos*, todavía más sorprendente resulta

FIG. 10



comprobar cómo, a continuación, el geómetra demuestra el inverso del teorema de Pitágoras. Es la proposición 48, que habitualmente suele pasar desapercibida, pero tiene un gran valor lógico-deductivo, que Euclides reivindica. En ella se afirma que si en un triángulo rectángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el ángulo que estos forman es recto (figura 10). La demostración consiste en trazar un segmento *CD* perpendicular a *AC* e igual a *CB*. Por hipótesis:

$$BC^2+AC^2=AB^2,$$

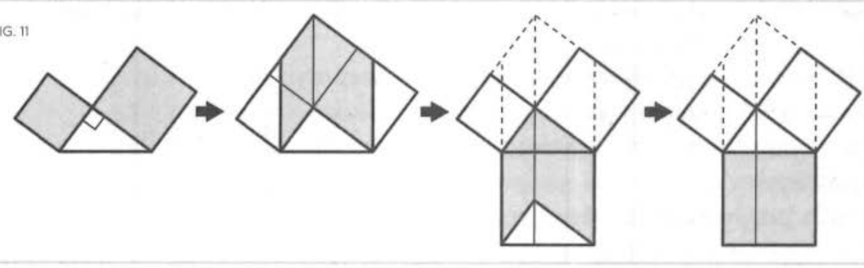
y por ser rectángulo el triángulo *ADC*:

$$AC^2+CD^2=AD^2.$$

Como $BC=CD$, tiene que ser $AB^2=AD^2$ y, por tanto, $AB=AD$. De manera que los triángulos *ADC* y *ABC* son congruentes, y el ángulo *ACB*, igual al *ACD*, debe ser recto.

Euclides también presenta una aproximación gráfica al problema, transformando cada cuadrado sobre un cateto en su paralelogramo de igual área (puesto que tienen igual base e igual altura), para luego recolocar estos paralelogramos en el cuadrado sobre la hipotenusa. Esta genial prueba aclara la parte que ocupa cada uno de los cuadrados sobre los catetos (figura 11).

FIG. 11





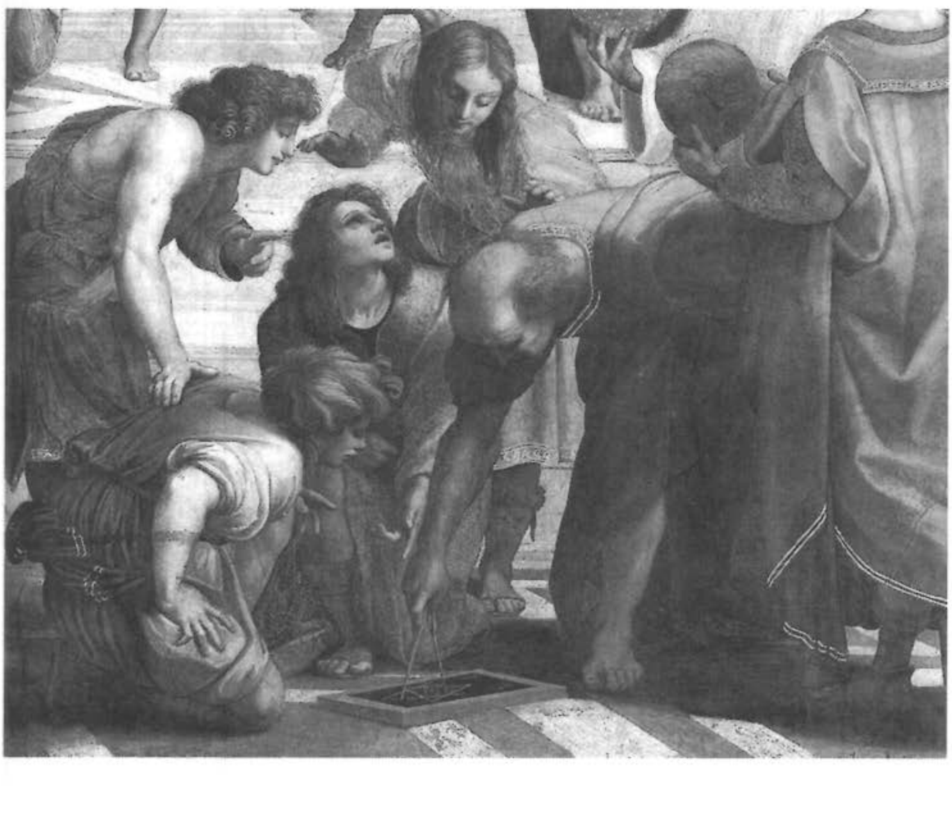
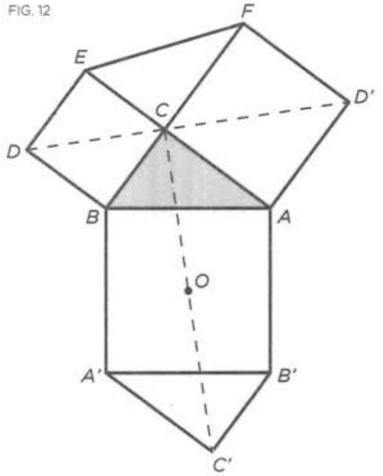


FOTO SUPERIOR:
El papiro Oxyrhynchus 29, parte de una copia de los *Elementos* datada entre los siglos II-IV d.C. (Universidad de Pensilvania, Filadelfia).

FOTO INFERIOR:
Un nuevo detalle de *La escuela de Atenas*, de Rafael: la parte en la que aparece Euclides (con el compás). El matemático está situado en el mismo plano que Pitágoras, pero en el extremo opuesto de la obra (Museos Vaticanos, Roma).

FIG. 12



De hecho, el teorema de Pitágoras es uno de los que cuenta con un mayor número de demostraciones diferentes mediante los métodos más diversos. Una de las razones de ello es que en la Edad Media se exigía realizar una nueva demostración del teorema para alcanzar el grado de *Magister matheseos*, o «maestro de matemáticas», y, en cierto sentido, la tradición acabó convirtiendo esa gesta en una muestra de magisterio del conocimiento universal.

El genio Leonardo da Vinci (1452-1519) fue el más notable de los polímatas del Renacimiento italiano, pues cultivó con igual brillantez disciplinas de los más diversos campos del saber, tanto en el terreno científico como en el artístico. El mismo hombre que imprimió su enigmática delicadeza a la Gioconda y concibió innumerables máquinas sorprendentes e ingeniosas también fue capaz de desarrollar una sobresaliente prueba del teorema de Pitágoras.

Leonardo tomó como base el famoso «molino», es decir, el triángulo y sus tres cuadrados sobre los lados. A estos añadió un triángulo *ECF* en la parte superior y colocó estratégicamente otra copia del triángulo *A'C'B'* en la parte inferior (figura 12). Trazando *DD'y CC'*, que resultan ser perpendiculares, se observa que *DD'* divide el hexágono superior *ABDEFD'* simétricamente y que las dos partes se pueden girar y colocar tapando el hexágono *ACBA'C'B'*. En consecuencia, los dos cuadrados sobre los catetos deben sumar un área igual que el cuadrado situado sobre la hipotenusa.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS HOY

Dos milenios y medio después de su descubrimiento, el teorema de Pitágoras sigue manifestándose en múltiples aplicaciones ma-

temático-científicas, en lo que se diría un ejercicio de eterna juventud asombroso y envidiable.

Este resultado matemático, quizá tan ubicuo por lo sencillo, resulta esencial en el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de figuras. En un cuadrado de lado x, la diagonal vale $x\sqrt{2}$; en un rectángulo de lados x, y, la diagonal vale $\sqrt{x^2+y^2}$; en un paralelepípedo, esto es, por ejemplo, una caja de zapatos, de aristas x, y, z, la diagonal vale $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; en un cono de altura h y radio de la base r, la generatriz vale $\sqrt{h^2+r^2}$... Y sería posible continuar así durante páginas y páginas.

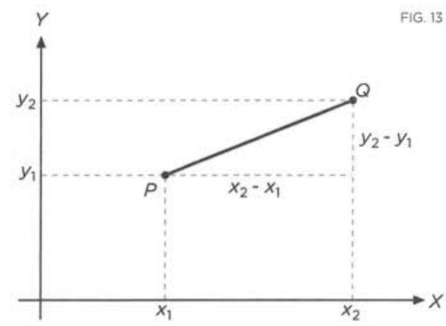


FIG. 13

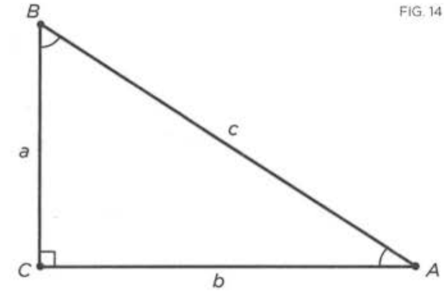


FIG. 14

Pitágoras también está presente cuando se introducen coordenadas cartesianas en el plano, y en el espacio, para definir la distancia $d(P,Q)$ entre dos puntos $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$, tal como se muestra en la figura 13. Aplicando el teorema:

$$\text{Distancia}\,(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

En todo cálculo en el que se usan funciones, es decir, en el cálculo funcional, aparece la relación pitagórica, al considerar las gráficas $y=f(x)$ en referencias cartesianas. Del mismo modo, el teorema se encuentra en la totalidad de la trigonometría. A la medida de los ángulos de un triángulo rectángulo se asocian las funciones seno, coseno, tangente... (figura 14), siendo

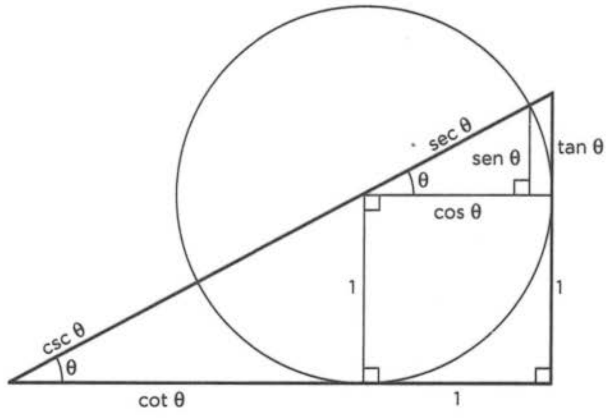
$$\operatorname{sen} A=\frac{a}{c} \qquad \cos A=\frac{b}{c} \qquad \tan A=\frac{a}{b}.$$

De ese modo, en términos trigonométricos, el teorema de Pitágoras se expresa como la relación $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

Por ese motivo, asimismo, es posible hallar la presencia del teorema en la topografía, en la cartografía, en la navegación marítima o aérea y, por supuesto, en la arquitectura, la ingeniería y todos aquellos ámbitos de la actividad humana que pongan en juego medidas y cálculos técnicos.

Para comprobar la importancia capital del teorema en la trigonometría, considérese la figura siguiente. Además de contener el círculo unidad y el triángulo rectángulo que tiene por catetos el seno y el coseno, la figura muestra muchos otros segmentos que corresponden a las demás funciones trigonométricas. Puede hallarse la tangente, que es cociente del seno y el coseno; pero también las tres razones recíprocas: la secante, que es 1 dividido por el coseno, la cosecante, que es recíproca del seno, y la cotangente, recíproca de la tangente. Una vez más, gracias al omnipresente teorema de Pitágoras, la variedad de triángulos rectángulos que aparecen en la figura permite obtener de manera inmediata una larga serie de relaciones interesantes entre esas seis funciones trigonométricas:

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta,$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta,$$
$$(\tan\theta + 1)^2 + (\cot\theta + 1)^2 = (\sec\theta + \csc\theta)^2.$$



EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN OTROS POLÍGONOS

No cabe duda de que la relación pitagórica griega está relacionada de forma íntima con una figura geométrica muy concreta, el triángulo rectángulo. Pero, considerando la clásica representación del molino de viento, en la que tres cuadrados prestan sus lados para componer los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo, surgen de inmediato algunas preguntas. ¿Qué ocurriría si se aplicaran los cuadrados para componer un triángulo cualquiera? Es más, ¿qué ocurriría si se aplicaran sobre un paralelogramo?

Si se añaden tres segmentos al triángulo rectángulo con sus cuadrados, se forma un hexágono donde aparecen tres nuevos triángulos de áreas T_1, T_2 y T_3 (figura 15). ¿Qué valor tienen las nuevas áreas? En todos los casos son iguales y valen exactamente el área T de la figura inicial: $T_1 = T_2 = T_3 = T$. Sirva la figura 16 para demostrar que se deduce $T = T_1$ al girar T_1, ya que la base y la altura de los dos es igual. Para los otros triángulos, el procedimiento es el mismo.

FIG. 15

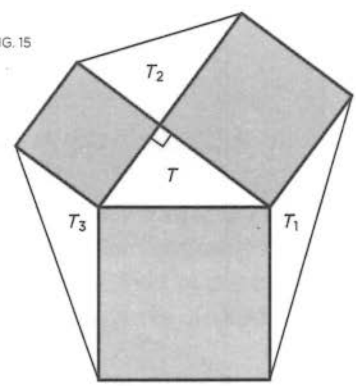
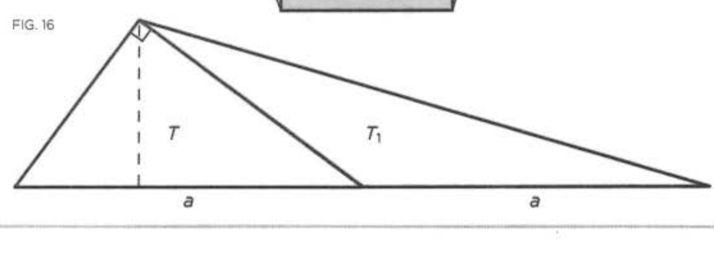


FIG. 16



Si ABC es un triángulo cualquiera, sigue teniendo sentido construir los tres cuadrados sobre los lados y preguntarse qué relación existe entre las áreas de estos cuadrados. Supóngase, por ejemplo, el caso de un triángulo agudo ($A < 90°$). La solución se contiene en la figura 17.

FIG. 17

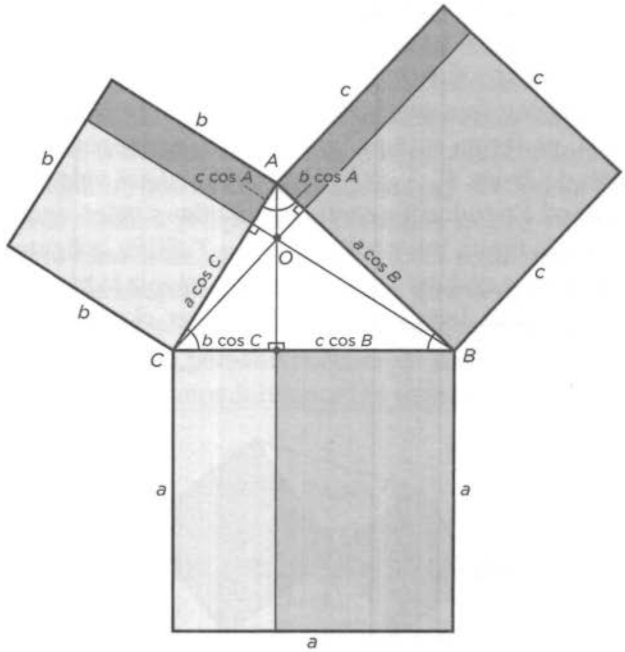
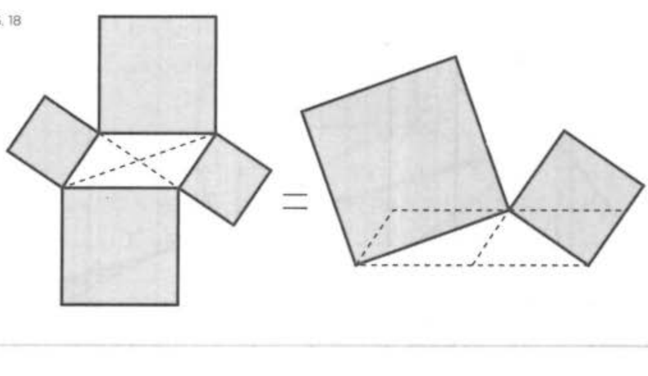


FIG. 18



En ella se han trazado las tres alturas del triángulo. A continuación, estas alturas se han prolongado hasta dividir los cuadrados situados sobre los catetos en dos rectángulos. Considerando las medidas de sus lados, resulta que el área del rectángulo superior derecho es $c \cdot (a \cos B)$. Lo asombroso es que esta área es la misma que la del rectángulo inferior derecho. El área de las secciones izquierdas es $b \cdot (a \cos C)$. Además, aparecen los dos fragmentos $b \cdot (c \cos A)$, lo que arroja el resultado:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A,$$

y esta es nada menos que la ley del coseno.

Por tanto, si $A = 90°$, el $\cos 90° = 0$ y resulta $b^2 + c^2 = a^2$, la celebérrima relación pitagórica. De este modo, la ley del coseno es una extensión del teorema de Pitágoras.

Otra propiedad sorprendente se manifiesta en los cuatro cuadrados que pueden generarse sobre los lados de un paralelogramo. Tal y como se aprecia en la figura 18, la suma de las áreas de los cuatro cuadrados es igual a la suma de los dos cuadrados que pueden dibujarse sobre las diagonales. Se trata de la ley del paralelogramo.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS

Para poner fin al comentario sobre las manifestaciones contemporáneas de uno de los más venerables resultados matemáticos de la historia de la ciencia, vale la pena considerar un par de divertimentos, que a pesar de serlo, no están en absoluto exentos de utilidad.

En primer lugar, el teorema de Pitágoras permite responder a una pregunta que el ser humano se hizo desde el mismo momento en que conoció la curvatura de la Tierra: ¿Hasta qué distancia es posible ver en el horizonte? Para calcularlo, únicamente es preciso saber la altura sobre el nivel del mar en la que se encuentra el observador. A modo de ejemplo, en el caso de que el observador esté admirando el paisaje en lo alto de una montaña

de 1 000 m de altitud, es posible aplicar el teorema de la manera siguiente (figura 19):

$$(R+h)^2=R^2+v^2.$$

Por consiguiente:

$$v^2=(R+h)^2-R^2=(R^2+2Rh+h^2)-R^2=h^2+2Rh=h(h+2R),$$

siendo R el radio de la Tierra.

Como $2R+h$ es aproximadamente $2R$ porque h es muy pequeño respecto a R, resulta:

FIG. 19

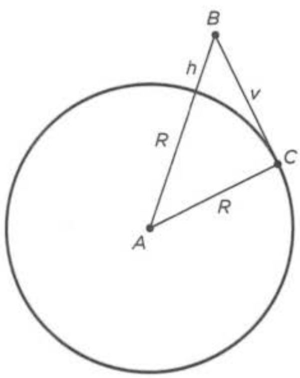
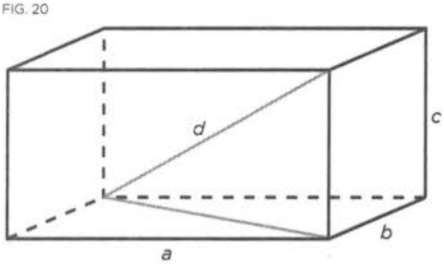


FIG. 20



$$v^2 \approx h\cdot(2R)$$

$$v \approx \sqrt{2Rh}.$$

Y con $R=6\,371$ km y $h=1$ km, resulta:

$$v \cong 112{,}88 \text{ km}.$$

Para finalizar, una pequeña vuelta de tuerca. El teorema de Pitágoras es una típica propiedad de los triángulos rectángulos del plano. ¿Sería posible proyectarlo en el espacio tridimensional? La respuesta a esta cuestión es afirmativa. Además, es posible hacerlo de varios modos. Un método conocido y muy intuitivo es considerar una caja de aristas a, b, c, y expresar el valor d de la diagonal de la caja mediante el teorema pitagórico: $d^2=a^2+b^2+c^2$ (figura 20).

CAPÍTULO 3

La secta de los pitagóricos

En el cenit de la colonización griega Pitágoras puso a prueba su proyecto de sociedad utópica, de base espiritual y filosófica, en la Magna Grecia. Allí fundó una secta en la que se admitían hombres y mujeres en igualdad y la propiedad era común. La hermandad se estructuraba mediante el acceso al conocimiento mágico-matemático. Es la primera sociedad de estas características de la que se tiene conocimiento, una auténtica secta del número.

El pitagorismo era una forma de vida. La comunidad de seguidores del maestro Pitágoras vivía sometida a una rigurosa serie de reglamentaciones que alcanzaba todos los aspectos de su cotidianidad, incluso los más prácticos. El acceso a la verdad y a la salvación dependía del cumplimiento estricto de esas normas, del mismo modo que sucedía en las doctrinas de las religiones mistéricas.

La ética de la comunidad primitiva estaba determinada por la idea de la inmortalidad del alma, que teñía la vida pitagórica de un carácter religioso y ascético. Por ese motivo, las reglas estaban encaminadas en su mayoría a que los miembros de la hermandad dominaran su carácter, se alejaran de las pasiones e ignoraran las necesidades del cuerpo, lo que era imprescindible para alcanzar el conocimiento supremo. En ese contexto, la música se consideraba «medicina para el alma» por su efecto balsámico, y la virtud máxima era la armonía del alma, un estado de perfección al que solo era posible elevarse mediante las sucesivas reencarnaciones. Por lo que parece, en vida del maestro, aunque el número ya hubiera manifestado sus propiedades en el sentido más puramente matemático, aún no había extendido su influencia en la ética pitagórica ni había impregnado su cosmología.

Para los pitagóricos la existencia tenía un objetivo místico: el contacto con lo divino. Por ese motivo estaba estructurada en forma de ascenso por etapas. Al modo del orfismo, que daba al

hombre un origen divino y concebía la vida como una lucha por recuperarlo, Pitágoras consideraba el alma como la parte divina del hombre y su única esperanza de supervivencia.

Por otro lado, no hay que tener reparos en calificar la escuela que fundó el sabio de Samos como una secta. La vida pitagórica, tal y como la han transmitido los cronistas, cumple punto por punto todos los elementos que definen a una secta religiosa en un sentido puramente sociológico, sin matices peyorativos. El maestro, máxima autoridad espiritual, proponía a sus seguidores un conjunto de iniciaciones y reglas obligatorias para caminar por la vida, los sometía a una estructura jerárquica con mandos y categorías y les ofrecía una codificación del ascenso a la verdad. Los miembros del grupo se distinguían por su vestimenta, alimentación y rituales, una forma de vida alternativa a la sociedad tradicional.

JERARQUÍA PITAGÓRICA

La jerarquía pitagórica respondía a los diferentes grados de iniciación de los miembros de la secta. La división básica consistía en dos grupos: los «acusmáticos» y los «matemáticos». Los primeros escuchaban las proposiciones básicas de las enseñanzas del maestro, pero no tenían acceso a una explicación más completa, al razonamiento que las justificaba; mientras que los segundos las razonaban y conocían sus entresijos. Estas enseñanzas enigmáticas se transmitían a través de máximas alegóricas llamadas *acusmata*, que los iniciados del nivel más bajo repetían a modo de oración. Quiere la tradición que Pitágoras aprendiera en Egipto este método propio de las sectas, pero lo cierto es que las máximas pitagóricas eran muy semejantes a las sentencias del oráculo de Delfos.

A esta división básica, la más conocida, se añadían otros estamentos de poder o autenticidad según el grado de proximidad al conocimiento razonado. A su vez, el grado de poder dentro de la secta tenía correspondencia con el rigor en las costumbres, de

modo que un mayor conocimiento implicaba normas más estrictas y un estilo de vida más severo.

Según la tradición, los iniciados atendían a las exposiciones del maestro desde el otro lado de una cortina que les impedía verle, formando un círculo exterior. Estos eran los «exotéricos», pues se encontraban fuera del círculo del maestro. Los nuevos miembros debían superar varias pruebas de iniciación, que consistían en guardar voto de silencio y practicar una vida pura que incluía el vegetarianismo, el uso de ropas blancas y la meditación. A medida que completaban el período de prueba, conseguían atravesar la cortina e ingresar en el círculo interior. En ese momento pasaban a denominarse «esotéricos».

El ingreso en la secta era un proceso muy largo que comenzaba con exámenes físicos, morales y de actitud. Algunas fuentes señalan que el candidato entraba en un período de prueba de tres años y que entonces comenzaba el primer grado de iniciación: un voto de silencio de cinco años. El silencio pitagórico procedía también de los rituales mistéricos, la revelación de cuyos secretos estaba prohibida y castigada, y era una práctica preliminar al secretismo absoluto que rodeaba las enseñanzas de la secta. El voto de silencio y el autocontrol fueron dos disciplinas morales muy admiradas durante toda la Antigüedad.

En la jerarquía pitagórica se han identificado otros dos grupos, cuya división no siempre queda clara, que recibían el nombre de «administradores» y «políticos». Los primeros gestionaban la vivienda y el patrimonio de la comunidad, pues, al ingresar en la secta, los bienes del nuevo miembro se incorporaban al tesoro común. Por su parte, los políticos se encargaban de las relaciones del grupo con el exterior.

Pero la división más extrema y clara era la que separaba a los miembros de la secta de la sociedad convencional. El grupo reaccionaba de modo hostil frente a aquellos que lo abandonaban o pretendían ingresar sin ser merecedores de ello. Los desertores se consideraban muertos. Podían irse libremente y se les reintegraba lo que habían aportado a la comunidad multiplicado por dos, pero la hermandad les dedicaba una tumba y a partir de ese momento se consideraba que no existían realmente.

Los miembros de la hermandad, que tenían una gran movilidad geográfica, disponían de contactos en las ciudades más importantes del sur de Italia y Sicilia, donde se articuló una amplia red de hospitalidad pitagórica. Los hermanos empleaban una serie de contraseñas secretas para reconocerse a todo lo largo del mundo antiguo, y así poder prestarse ayuda en momentos de peligro. La tradición está repleta de anécdotas sobre pitagóricos en situaciones de necesidad que son auxiliados por otros compañeros, a los que identifican con ingeniosas señales secretas.

«Como los pitagóricos a Apolo, así sacrificamos, sin comer cosa alguna que alma tenga.»

— DIÓGENES LAERCIO CITANDO EL *ALCMEÓN* DE MNESÍACO EN EL CAPÍTULO DEDICADO A PITÁGORAS EN SU OBRA *VIDAS DE LOS FILÓSOFOS MÁS ILUSTRES*.

TABÚES PITAGÓRICOS

Se ha dicho a menudo que los pitagóricos eran vegetarianos, pero hay autores que aseguran que Pitágoras solo evitaba ciertas partes de los animales, a saber: las entrañas, las criadillas y los genitales, la médula ósea, los pies y la cabeza. Este punto es todavía hoy motivo de discusión; en todo caso, está probado que los miembros de la secta guardaban una serie de tabúes alimentarios muy estrictos por influencia de la doctrina de la inmortalidad del alma.

Los tabúes alimentarios variaban según la jerarquía. Los iniciados de nivel inferior podían comer todo tipo de carne, con la única excepción de la carne de los bueyes, por su desempeño en el arado, y de los carneros. El consumo de pescado estaba sujeto a una reglamentación muy estricta.

El tabú alimentario pitagórico más célebre y peculiar, por lo aparentemente arbitrario, es sin lugar a dudas la prohibición de comer habas. Un catálogo de razones extravagantes lo justificaba, vinculándolo, en suma, con la cadena de las reencarnacio-

nes, de modo que quedaban extrañamente relacionadas con la carne humana y su ingesta podía llegar a considerarse un acto de canibalismo.

No menos peculiares son las leyendas que circulaban sobre la alimentación del propio Pitágoras. Se dice que para preparar su meditación tomaba alimentos que saciaban rápidamente el hambre o la sed, o incluso que dejaba de alimentarse por completo. La lista incluía ingredientes como semillas de adormidera y sésamo, flores de narciso y hojas de malva, granos de cebada y garbanzos. Para beber, reunía semillas de pepino y uvas pasas desgranadas, queso troceado, harina y crema de leche, y lo mezclaba todo con miel silvestre.

SACRIFICIOS Y REENCARNACIÓN

El sacrificio animal era uno de los pilares del culto y la piedad griega hacia los dioses. Por ese motivo no debe resultar extraño que la religiosidad de los pitagóricos se expresara en esa forma. Ahora bien, se diría que el sacrificio animal se encuentra en contradicción con la idea de la reencarnación. Para solventar este problema, algunos autores aseguran que los pitagóricos realizaban ofrendas incruentas, mientras que otros ofrecen complejas argumentaciones que pretenden demostrar que las almas de los hombres no podían entrar en los animales consagrados. En cualquier caso, parece que eran los miembros de los estratos más bajos de la secta los que se encargaban de sacrificar animales y cumplir con los rituales de la religión convencional, que en ocasiones parecían contradecir las enseñanzas del maestro.



Cerámica griega datada en torno al siglo v a.C. Atribuida a Epidromos, su decoración está dedicada a un sacrificio animal (Museo del Louvre, París).

MÁXIMAS PITAGÓRICAS

La de Pitágoras fue una edad de prestigio de la oralidad, donde la sabiduría efímera se equiparaba con la sabiduría verdadera. Quizá por ello el sabio de Samos «no escribió nada en absoluto, como Sócrates», en palabras del historiador griego Plutarco (siglos I-II d.C.). Sin embargo, a lo largo de los siglos diversos autores aseguraron que Pitágoras había fijado sus doctrinas en algunas obras escritas. Una tradición le atribuye tres libros (sobre educación, política y naturaleza), mientras que otra le acusa de haberlos plagiado de Orfeo.

Pero la leyenda más famosa es la que defiende la existencia de un texto sagrado básico del pitagorismo, que supuestamente contenía las enseñanzas secretas de la secta y del que se realizaron algunas copias que circularon por el mundo griego al poco de su muerte. Se trata del denominado *Discurso sagrado*. No hay evidencias fiables de su existencia y lo más probable es que no existiese. En cualquier caso, todas las descripciones del discurso que dio el maestro al llegar a Crotona refieren que sus palabras se consideraron divinas y causaron la adhesión incondicional de numerosas personas, que pasaron a formar una hermandad compartiendo todas sus posesiones.

LOS «VERSOS DE ORO»

El filósofo neoplatónico Jámblico de Calcis afirmó que, a través de Filolao de Crotona, llegaron a manos de Platón algunos textos escritos por los pitagóricos. En la presunta lista de obras destacaba el *Discurso sagrado*. Desde el siglo III a.C. circularon unos *Versos de oro* que, según la leyenda, provenían del *Discurso sagrado* y en los que se quería ver la huella directa del propio Pitágoras. Era un breve compendio en 71 hexámetros que fue canonizado como modelo ético de comportamiento durante largo tiempo, alcanzando incluso al Romanticismo de la mano del alemán Goethe (1749-1832). Es posible que parte de las ideas que conforman el texto pudiera encontrarse en la secta originaria de Pitágoras, como ocurre con todos los textos tradicionales.



FOTO SUPERIOR:
***Los pitagóricos saludan el amanecer*, lienzo del pintor del siglo XIX F.A. Bronnikov (Galería Tretyakov, Moscú).**



FOTO INFERIOR:
***Pitágoras emergiendo del inframundo*, pintura del artista italiano Salvator Rosa realizada a mediados del siglo XVII (Kimbell Art Museum, Fort Worth).**

Como se ha dicho, la educación pitagórica se daba mediante símbolos de difícil interpretación, de carácter sentencioso y arcaico. Del mismo modo que las palabras de los oráculos, eran difíciles de entender pero, descubiertas sus claves de interpretación, era posible superar el enigma y acceder a un conocimiento de orden superior. Las máximas que memorizaban los acusmáticos eran lecciones orales similares a algunos preceptos religiosos griegos o a las normas de las religiones mistéricas, y se clasificaban en tres tipos:

— Definiciones por medio de preguntas, que señalaban «qué es» algo:

«¿Qué es el oráculo de Delfos? La *tetraktys*.»

«¿Qué son las Islas de los Bienaventurados? El Sol y la Luna.»

— Definiciones por lo mejor, que designaban «qué es lo más»:

«¿Qué es lo más justo? Sacrificar.»

«¿Qué es lo más sabio? El número.»

«¿Qué es lo más bello? La armonía.»

«¿Qué es lo más poderoso? El saber.»

«¿Qué es lo más excelente? La felicidad.»

— Normas de comportamiento, que indicaban«qué conviene hacer y qué no»:

«No pasar por encima de la balanza» (no transgredir la igualdad y la justicia).

«No herir el fuego con la espada» (no incitar la ira e indignación de los poderosos).

«Ayudar a llevar la carga, y no imponerla» (no provocar que alguien dejara de hacer algo).

«No comer corazón» (no atormentar el ánimo con angustias y dolores).

Una de las definiciones clave como medio de aprendizaje por medio de preguntas y respuestas introducía un concepto fundamental en el pitagorismo: la *tetraktys*, el conjunto de los cuatro

primeros números, cuya suma daba como resultado el número 10, el número perfecto en el pitagorismo posterior.

EL PITAGORISMO POLÍTICO

En la antigua Grecia a menudo es imposible separar al legislador del hombre divino. Los dos casos clásicos son Minos y Licurgo, los legisladores míticos de Creta y Esparta. Minos legisló en Creta tras recibir las leyes de Zeus, mientras que Licurgo fue el héroe responsable de las leyes de Esparta, que aprendió primero en Creta y Egipto y luego Apolo refrendó en el santuario de Delfos. Incluso las leyes de Solón de Atenas, uno de los Siete Sabios de Grecia y el primer legislador que contribuyó a desvincular la política de la religión, presentan restos de esa relación, pues, según la leyenda, el oráculo de Delfos podría haber guiado su labor política. Por otra parte, el lugar que en la tradición griega ocupó Minos, tuvo su correlato en la antigua Roma con el rey Numa Pompilio y en el mundo hebreo con Moisés.

Los legisladores-adivinos se extendieron por todo el mundo griego, y en las ciudades del sur de Italia se manifestaron transformados en una tradición cultural de pensadores como Parménides, Zenón o el propio Pitágoras. El sabio de Samos fue el ejemplo por excelencia del santón con influencia política, el legislador de inspiración divina, fundador de reglas y preceptos universales. De hecho, la sociedad que fundó —donde se admitían hombres y mujeres en iguales condiciones, la propiedad era común y su modo de vida, comunitario— se considera la primera comunidad de tales características de la que se tiene noticia.

No es posible saber con certeza si los viajes de aprendizaje de Pitágoras fueron reales o hasta qué punto el sabio dedicó su primera escuela, el Semicírculo de Samos, a poner a prueba sus ideas. Como fuere, la estancia en Creta que refieren algunas de sus biografías con motivo de su aprendizaje político podría tener ciertos visos de realidad y haber sucedido durante su periplo por Grecia antes de establecerse en Crotona. Creta se consideraba

un lugar de máximo prestigio para aprender la excelencia en las leyes, además de ser la puerta de entrada en Grecia de las ideas procedentes de Egipto, permanente y antiquísimo ejemplo para la cultura griega.

La colonización griega favoreció la concordia social, porque permitió poner a prueba en lugares remotos diversas formas de utopía política y religiosa que las clases dominantes ahogaban en las metrópolis. Pitágoras abandonó su isla natal empujado por el clima político del régimen del tirano Polícrates, que debía de ser contrario a su proyecto de desarrollar un gobierno basado en principios espirituales. Algunos autores afirman que Pitágoras tuvo que huir por haberse significado en la arena política a petición de sus conciudadanos, lo que parece sugerir que debió de encabezar alguna resistencia a las injustas leyes del tirano.

A partir de ese momento, fuentes diversas refieren las visitas de Pitágoras a oráculos y ciudades como Delos, Delfos, Esparta y Fliunte, donde algunos aseguran que intentó poner en práctica su sociedad utópica. Los ensayos fracasaron en las *poleis* griegas y así decidió probar suerte en las colonias griegas de Italia.

¿Qué razones llevaron a Pitágoras a elegir la ciudad de Crotona como destino? Por un lado, era una ciudad próspera y famosa por ser el hogar de numerosos atletas vencedores en los juegos olímpicos. Pero sobre todo se había convertido en un gran centro de la ciencia griega, principalmente en la medicina. Sus médicos recorrían todo el mundo griego, y algunos de los más notables, como Demócedes de Crotona (siglo VI a.C.), llegaron a prestar sus servicios en la corte persa, la máxima expresión de la sofisticación y el boato orientales para la mentalidad de los griegos arcaicos.

EDUCACIÓN PITAGÓRICA

Los discursos que dio el maestro a su llegada a Crotona debían de contener cierta idea del universo sociopolítico de los pitagóricos. Dice la leyenda que los notables de la ciudad encargaron al sabio recién llegado que instruyera a los jóvenes con sus nuevas enseñanzas. Pitágoras dio cuatro discursos presentando sus normas de

LA COLONIZACIÓN GRIEGA

Entre los siglos VIII y VI a.C. tuvo lugar la colonización griega del Mediterráneo, un proceso que fue a la vez parte y motor de los grandes cambios que se produjeron en las ciudades griegas. La partida de grupos de ciudadanos en busca de nuevos territorios donde refundar su civilización solucionaba los problemas de carestía, regulaba la población o simplemente hacía de válvula de escape para la conflictividad social o política. El proceso de colonización potenció el comercio e hizo posible importar alimentos de regiones más fértiles, donde se podían obtener en mayores cantidades y con menos esfuerzo. Para pagar las importaciones de alimentos, las ciudades griegas se dedicaron a la industria: fabricaron armas, tejidos o cerámica para intercambiar por los cereales, aunque también desarrollaron la agricultura especializada, produciendo vino y aceite de oliva, para los que la tierra griega es apropiada.

comportamiento, en los que estableció las bases de sus normas éticas y políticas y dibujó las líneas de lo que sería la forma de vida pitagórica.

Los primeros dos discursos versaron sobre cuestiones políticas. El primero lo dio en el gimnasio, frente a los jóvenes de Crotona. Les aconsejó honrar a los mayores y a los dioses y llevar a cabo una política de alianzas con sus vecinos. A continuación dirigió un discurso al senado, presentando la idea pitagórica de la armonía política y del Estado como una herencia que se debe proteger y administrar con rigor por la mayoría y para la mayoría.

Los dos discursos siguientes se centraron en la educación religiosa. El discurso que dirigió a los niños es un compendio de información sobre rituales. Y el último discurso, pronunciado frente a las mujeres de la ciudad, permite extraer información muy significativa sobre el interés por la mujer de la secta pitagórica, que promovía el matrimonio dentro de su hermandad. Como resulta patente, el contenido de estos discursos contradice el supuesto igualitarismo de la hermandad pitagórica, pues parece que Pitágoras concebía la política como el terreno de los hombres y relegaba a las mujeres y a los niños a las cuestiones religiosas.

ORIENTACIÓN POLÍTICA

Aún hoy la orientación política de los pitagóricos es motivo de debate. ¿Era un grupo demócrata o aristocrático? Las fuentes ofrecen afirmaciones contradictorias: a veces Pitágoras parece un campeón de la libertad, pero en otras ocasiones los pitagóricos figuran como un grupo elitista que seleccionaba sus miembros entre las mejores familias de Crotona.

Desde el primer momento, la secta fue objeto de todo tipo de acusaciones sobre sus pretensiones políticas. En un discurso al senado de la ciudad, uno de sus opositores afirmó que los pitagóricos planeaban someter al pueblo, al que comparaban con ganado. El historiador Diógenes Laercio recoge a su vez que los crotoniatas se levantaron contra los pitagóricos por su tendencia a la tiranía. Pero hay que tener en cuenta que esa acusación era muy habitual en la época y solía emplearse como excusa para emprender una revuelta.

Frente a las calumnias, se levantan otro tipo de evidencias. Varias fuentes atestiguan que los pitagóricos estaban tan bien considerados como modelo de virtud por sus convecinos que a menudo eran designados como árbitros, y los ciudadanos se sometían a sus juicios sin problemas. Hay textos que los presentan como políticos y legisladores, a veces como meros consejeros o incluso llevando las riendas de algunas ciudades italianas, pero siempre negándose a recibir un sueldo público. Por desgracia, los únicos datos determinantes avalan solo la actuación de Pitágoras y sus seguidores como consultores políticos en asuntos de relevancia de algunas ciudades.

Los indicios son muchos y contradictorios, pero, en conclusión, las evidencias históricas apuntan a la tendencia aristocrática y elitista de los pitagóricos, una opción que no es extrañar en un modelo de hermandad iluminada dirigida por un líder incontestable. Por ejemplo, parece que los seguidores de Pitágoras se captaban entre las clases nobles. De ellos se componía el núcleo de la comunidad, los trescientos hombres más próximos al maestro, que no so lo tenían acceso directo a sus ideas filosóficas y políticas, sino que las llevaban a la práctica. Cuando las sociedades

LA RETÓRICA POLÍTICA

Para algunos autores, la retórica política nació con los cuatro discursos que Pitágoras pronunció ante diferentes sectores de la población crotoniata. La leyenda dice que la retórica pitagórica utilizaba una gran variedad de tonos y argumentaciones para adaptarse a cada tipo de auditorio, pues el objetivo del discurso era la seducción de las almas a través del poder de la palabra, más allá del propio contenido del discurso. La forma de pensar contemporánea no puede por menos que rechazar esta idea, pero, para comprender en su dimensión la mentalidad griega, vale la pena recordar el éxito de los sofistas Gorgias y Protágoras en la Atenas democrática, donde se consideraba señal de sabiduría el hallar el discurso adecuado a cada individuo.

pitagóricas se extendieron a otras ciudades de la zona, Síbaris, Metaponto o Tarento, siguieron el mismo modelo.

Bajo esta luz quizá resulte más fácil entender las razones que acabaron desembocando en la sublevación contra los pitagóricos. En la antigua Grecia la idea de la tiranía se relacionaba con el hecho de que un gobernante hubiera tomado el poder mediante un golpe de fuerza, más que con que fuera un gobernante cruel, aunque al final los tiranos lo acabaran siendo, pues, como régimen de poder absoluto, la tiranía se convirtió en el sistema político al que recurrían los autoritaristas. En ese sentido es posible que los pitagóricos fueran una sociedad de carácter aristocrático y a la vez antitiránico, pues la tiranía podía ser impulsada por una revuelta popular de carácter reaccionario.

LA REVUELTA ANTIPITAGÓRICA

Durante el desarrollo de la escuela pitagórica y la extensión de sus ideas, Crotona vivió una época de esplendor político. De hecho, el comandante de las triunfantes tropas crotoniatas en tiempos de Pitágoras tenía por nombre Milón, y algunos autores han querido

ver en él al propietario de la casa donde tuvo lugar el legendario incendio que selló el fin de la secta. Paradójicamente, el auge de la ciudad finalizó con la sublevación antipitagórica.

El grupo cerrado y elitista de los pitagóricos extendió su influencia política hasta ejercer una fuerte presión en la sociedad de la Magna Grecia. En Crotona un grupo popular se reunió alrededor de Cilón, un hombre acaudalado de tendencias tiránicas, y se levantó contra la sociedad de los pitagóricos.

Al final violento de la secta en su ciudad natal siguió la persecución de las congregaciones pitagóricas en las demás ciudades, en medio de brutales disturbios. La liquidación súbita de las cúpulas dirigentes de aquellas *poleis* abrió un terrible período de guerra civil en toda la región, con caídas de gobiernos en cascada. Los sublevados ya no actuaban solo contra los pitagóricos, sino que extendieron sus ataques a todas las aristocracias gobernantes. Las ciudades de Grecia enviaron embajadas y, finalmente, el orden fue restablecido.

Más allá de los motivos de la sublevación, tanto los disturbios como la muerte de Pitágoras en Metaponto, seguramente posterior, acabaron con la actividad pública de los pitagóricos. La secta no renació jamás ni como organización de importancia política ni como forma de vida, aunque eso no significa que se extinguiera, sino solo que no se volvió a reunir públicamente. Algunos notables supervivientes volvieron a las metrópolis, y en algunos casos desempeñaron papeles políticos, siempre a título individual. Entre ellos se cuentan Filolao y Arquitas.

CAPÍTULO 4

Un universo basado en el número

Pitágoras creía que los números eran la esencia de todas las cosas y que el mundo era armonía. Sus discípulos más dotados se dedicaron a descubrir las propiedades y relaciones numéricas y establecer analogías entre los números y las cosas. El producto de su esfuerzo científico tuvo como resultado una mística numérica que influyó en todo el mundo antiguo y que puso la última piedra de un largo proceso: la fundación de las matemáticas como ciencia.

Pitágoras de Samos pasa por ser el padre de las matemáticas según una parte de la tradición, si bien voces no menos autorizadas le obligan a compartir el honor con otras grandes figuras, a veces muy próximas en el tiempo y el espacio, como Tales de Mileto, cuyo valedor es nada menos que Aristóteles.

Lo cierto es que los primeros progresos matemáticos relevantes se desarrollaron en Mesopotamia y Egipto y comenzaron a registrarse hacia el año 3000 a.C. Los rudimentos básicos de la futura ciencia son incluso anteriores. Las matemáticas aparecen de manera espontánea como emanación de las actividades del ser humano en su continua lucha con la naturaleza que lo rodea, produciendo resultados análogos en lugares y tiempos distintos, fruto de la necesidad del hombre primitivo de desarrollar instrumentos para resolver problemas prácticos. Para contextualizar adecuadamente la aportación matemática de los pitagóricos, se hace pues pertinente un viaje por la historia de esta disciplina en tiempos anteriores al pensamiento griego.

CONTAR Y ORDENAR

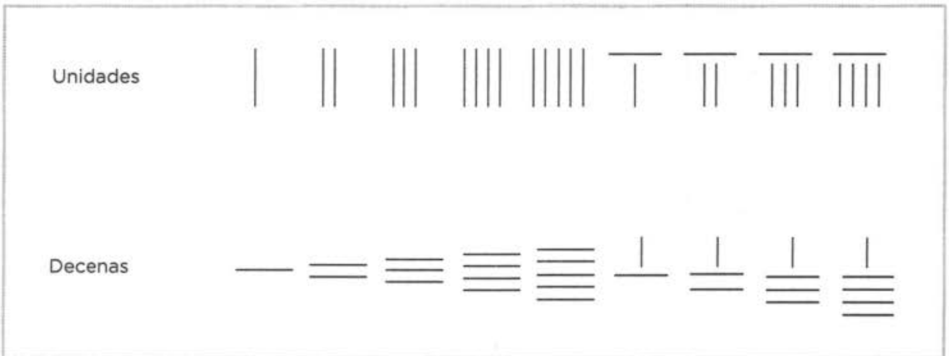
La primera etapa en el camino hacia el concepto de número fue el reconocimiento de diferencias como «mucho» y «poco», cantidad «grande» y cantidad «pequeña», o la diferenciación intelectual

entre lo uno y lo múltiple. El siguiente paso fue la aparición de los sistemas binarios y ternarios. Algunos pueblos primitivos distinguían precariamente entre 1, 2 y, luego, «muchos», mientras que otros conocían números más elevados con los que llegaron a realizar operaciones. Más tarde, algunas culturas introdujeron el uso de una base como el 10, el 20 o el 5 para representar una unidad de orden superior al ir contando.

En su mayoría, las primeras civilizaciones no consideraban los números como conceptos abstractos. Los nombraban con palabras relacionadas con el objeto numerado y los representaban con símbolos semi-mágicos. La distinción entre las palabras que designan los números y los conjuntos particulares numerados fue un proceso muy largo. Así, ciertas cantidades representativas (los cinco dedos de una mano, los diez dedos de ambas manos) desempeñaron un papel fundamental en la formación de las operaciones aritméticas y en la elección de una base para el sistema numérico.

Estos pueblos conocían ya las cuatro operaciones aritméticas elementales, que usaban toscamente y con números bajos. También tenían la idea de fracción, por lo común limitada a 1/2, 1/3 y poco más, que expresaban con una palabra. Con toda seguridad desarrollaron las nociones geométricas básicas: recta, círculo, ángulos... Su conocimiento matemático alcanzaba hasta donde requerían sus aplicaciones: cálculos comerciales muy simples, cálculo aproximado de áreas de campos, diseños de decoración geométrica para la cerámica o los tejidos y, sobre todo, la medida del tiempo.

Cifras chinas de bambú. Sistema numérico de base 10.



En la fase final del desarrollo de las sociedades más tempranas se registraron progresos numéricos que comportaron una avanzada capacidad de abstracción: la correspondencia entre números abstractos y la cantidad de cosas concretas, la construcción aditiva de la sucesión de números y el uso de un número como base de un sistema numérico.

Pero el disparo de salida de las matemáticas, y de todas las ciencias en general, está ligado de modo indisoluble a la sedentarización y el desarrollo de las primeras ciudades. Hacia el año 10000 a.C. dio comienzo un cambio decisivo en la relación del hombre con la naturaleza y también en la de los hombres entre sí. Las culturas primitivas abandonaron poco a poco su economía basada en la caza y la recolección y se establecieron en zonas seleccionadas; construyeron viviendas estables y se dedicaron a la agricultura, a la domesticación de animales y a la cría de ganado. Con la consiguiente división del trabajo, la sociedad humana se estratificó en clases basadas en la producción agraria; aparecieron la propiedad privada y el Estado; nuevas y más complejas necesidades obligaron a afinar los conocimientos matemáticos y astronómicos.

En numerosas civilizaciones las matemáticas ocuparon el lugar más destacado entre las ciencias que estaban dando sus primeros pasos, aunque también existían muchas culturas que desconocían por completo este progreso. La forma concreta y el nivel de los conocimientos que alcanzaron las matemáticas de aquel período seminal dependió de la concepción del mundo que dominaba en cada uno de los pueblos en los que se manifestaron. En general, la ciencia de la sociedad agraria se mantuvo en el nivel que resultaba necesario, sin aventurarse más allá, y en el caso de las matemáticas, se ciñó a operaciones elementales con magnitudes constantes.

LA TIERRA ENTRE DOS RÍOS

Mesopotamia fue la primera de las civilizaciones antiguas en contribuir a la evolución de las matemáticas, en las que, gracias a los sumerios, alcanzarían un desarrollo superior al de los egipcios.

MESOPOTAMIA

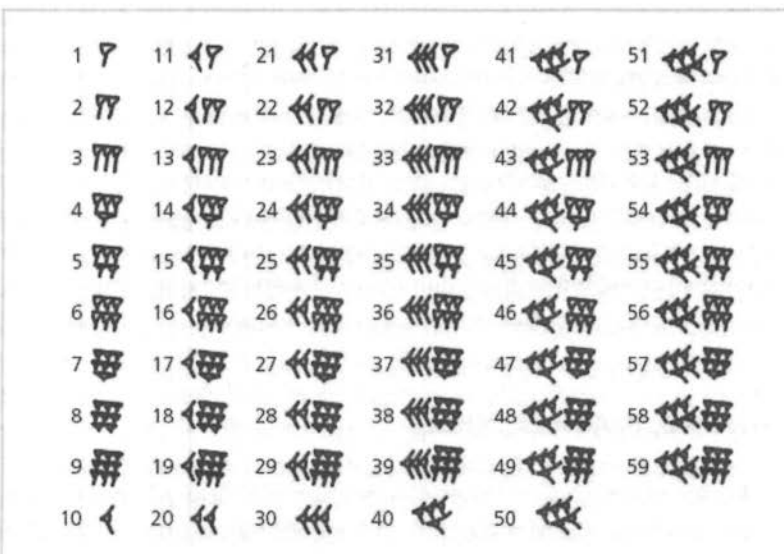
El adjetivo «mesopotámico» se aplica a todos los pueblos que ocuparon la vasta región del Creciente Fértil, comprendida entre los ríos Éufrates y Tigris hasta las montañas del Líbano, que hoy forma parte del Irak moderno. De hecho, Mesopotamia no alude a ninguna ciudad, país o cultura en concreto, sino que significa «tierra entre dos ríos». Los pueblos que vivieron en esta región construyeron ciudades como Babilonia, Ur, Susa, Uruk, Lagash... Afortunadamente, a pesar de los frecuentes cambios de gobernantes, el desarrollo de las matemáticas en Mesopotamia experimentó una continuidad de conocimientos y prácticas desde su inicio.

Los primeros textos matemáticos que se poseen —inscritos en tablillas de arcilla con escritura cuneiforme— proceden de la ciudad sumeria de Uruk. También aparecen contenidos matemáticos relevantes en las tablillas del antiguo imperio babilónico, sobre todo durante el apogeo cultural que se produjo durante el reinado del rey Hammurabi, como ya se ha señalado. Hacia mediados del siglo VI a.C. los persas aqueménidas comandados por Ciro el Grande conquistaron el poder en el Próximo Oriente, y algunos matemáticos persas de la época, como Naburiano y Kidinnu, cuyas peripecias sitúan los expertos entre los siglos VI y III a.C., llegaron a ser conocidos por los griegos.

Mesopotamia se hallaba en el cruce de las rutas comerciales más importantes, por lo que la economía ejerció gran influencia en el desarrollo de la aritmética antigua. Las culturas mesopotámicas utilizaron sus conocimientos de aritmética y álgebra elemental aplicándolos a longitudes y pesos, intercambios de moneda y mercancías, cálculo de intereses, pago de impuestos, divisiones de campos... De hecho, la mayoría de los textos cuneiformes que tratan de matemáticas se refieren a problemas económicos. Por otro lado, también la construcción de canales y conductos de riego exigía numerosos cálculos; el uso de ladrillos planteaba problemas numéricos y geométricos, y también había que resolver problemas de volúmenes de graneros.

Las características más peculiares del sistema numérico babilónico son el principio de notación posicional y la base 60. Se cree que la base 60 se desarrolló en relación con los sistemas de medidas de peso babilonios y que la notación posicional pudo proceder del sistema monetario, pero se desconoce cómo ambos llegaron a generalizarse. Sea como fuere, el avanzado sistema posicional sexagesimal resultó muy útil y superó a todos los sistemas numéricos de la Antigüedad. Los matemáticos helenísticos lo usarían ampliamente para llevar a cabo sus complicados cálculos, sobre todo en astronomía, donde lo impuso Ptolomeo (ca. 100-170 d.C.), haciendo que se difundiera por toda Europa. De este sistema proviene la partición del ángulo completo en 60 grados, del grado en 60 minutos y el minuto en 60 segundos. Pero el sistema sexagesimal tenía un grave inconveniente: la tabla de multiplicar llega hasta el 59 por 59. Por tanto, el sistema numérico tenía un alto valor práctico, pero solo en el caso de disponer de suficientes tablas de multiplicar. Y lo cierto es que esas tablas se han encontrado.

Las culturas mesopotámicas llegaron a alcanzar suficiente habilidad numérica y algebraica como para resolver ecuaciones com-



Números naturales expresados en escritura cuneiforme. El sistema utilizado en Mesopotamia era el sexagesimal.

> **NOTACIÓN POSICIONAL**
>
> La notación posicional es un modo de escritura numérica en el que el valor de cada dígito depende del lugar relativo que ocupa en relación a los demás, a fin de disminuir la cantidad de símbolos distintos necesarios para la escritura de todos los números. Está determinada por la base, que es el número de dígitos necesarios para escribir cualquier número. Existe una infinidad de sistemas de numeración de posición, y para las bases superiores a 10 es preciso introducir otros símbolos distintos a las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Los sistemas más difundidos en la actualidad son el de base 10 (sistema decimal), adoptado casi universalmente para los usos cotidianos, y los de base 2 (binario), 8 (octal) y 16 (hexadecimal), usados en informática.

plejas, pero, en general, su aritmética y su álgebra fueron muy elementales. Por otra parte, a pesar de que trabajaban con números y problemas concretos, mostraron un cierto grado de abstracción matemática al reconocer que algunos métodos eran propios de determinadas clases de ecuaciones. Pero la pregunta es: ¿conocieron en Mesopotamia la idea de demostración matemática? Pues bien, aunque supieran resolver ecuaciones complicadas mediante procedimientos sistemáticos correctos, los matemáticos mesopotámicos se limitaban a dar instrucciones de los pasos a seguir, sin considerar que hubiera que demostrarlos más que por su correcto funcionamiento. De este modo, en la matemática mesopotámica no es posible encontrar ni el concepto de demostración, ni la idea de una estructura lógica basada en principios que merecieran aceptación general, ni consideración alguna sobre el método y sus condiciones.

LAS CRECIDAS DEL NILO

En Mesopotamia las culturas que ejercieron el dominio cambiaron con frecuencia, añadiendo cada una su influencia, pero la civilización egipcia se mantuvo intacta durante milenios. La culminación

de la cultura egipcia se produjo en torno a la tercera dinastía, hacia el año 2500 a.C., la era en la que los faraones ordenaron la construcción de las grandes pirámides.

Debido a que el papiro se rompe al secarse demasiado, nos han llegado pocos documentos del antiguo Egipto, excepto las inscripciones jeroglíficas sobre piedra. Los documentos matemáticos más importantes que han sobrevivido son dos extensos papiros: el papiro de Moscú y el papiro Rhind, mencionados anteriormente. Ambos textos datan aproximadamente del año 1700 a.C., si bien contienen cuestiones matemáticas muy anteriores. Las primeras palabras del papiro Rhind hacen las veces de título y dan testimonio del prestigio de la disciplina a ojos de su autor: «Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios». Estos documentos contienen problemas matemáticos típicos y sus soluciones, por lo que probablemente debían de tener un propósito pedagógico. Como los egipcios no establecían ninguna separación entre aritmética y geometría, los papiros mezclan problemas de ambos ámbitos.

Se ha dicho a menudo que la geometría egipcia tuvo su origen en la necesidad que provocaba la crecida anual del río Nilo de volver a trazar las lindes de los terrenos cultivados por los agricultores. Lo cierto es que en Mesopotamia se desarrolló la misma geometría sin esa necesidad. Y de hecho, es posible que los egipcios tuvieran contacto con la civilización babilónica, pues en Tell al-Amarna, en el valle del Nilo, se han hallado tablillas cuneiformes datadas hacia el año 1500 a.C.

A juzgar por los problemas que contienen los papiros, los egipcios utilizaron las matemáticas en la administración del Estado y los templos, en el cálculo de salarios, de volúmenes de graneros y áreas de campos, en el cobro de impuestos según el área de la tierra, en la conversión entre sistemas de medidas y en el cálculo del número de ladrillos necesario para la construcción de edificios y rampas. Los papiros contienen también problemas relativos a la cantidad de grano necesario para producir cantidades dadas de cerveza, o la cantidad de grano de cierta calidad que se necesita para obtener el mismo resultado que con otro tipo de grano.

LOS TRIÁNGULOS DE AHMES

Observar las ilustraciones del papiro Rhind produce un sentimiento de fascinación al advertir en ellas elementos muy familiares que eliminan al instante los milenios de distancia entre el escriba Ahmes y el lector moderno. El primer triángulo que aparece dibujado pertenece al problema 51 del papiro. En él se busca el área del triángulo de altura 10 jet y base 4 jet. El jet, o «vara», era una medida de 100 codos (el codo real egipcio se dividía en 7 palmos, equivale a 52,3 cm). Por tanto, las medidas del triángulo serían: 523 m de altura por 209 m de base. La solución de Ahmes muestra que el triángulo es un isósceles, dividido en dos por la altura central, luego a partir de él se puede formar un rectángulo de la misma área.



El papiro Rhind es el más antiguo libro de texto de matemáticas que ha llegado casi intacto hasta la actualidad. La ilustración presenta un detalle del problema 51, en el que se pide hallar el área de un triángulo.

Del estudio de estos problemas se desprende que los egipcios disponían de recetas para el cálculo de áreas de rectángulos, triángulos y trapezoides. Pero, en el caso del área de un triángulo, aunque multiplicaban un número por la mitad de otro, no es posible saber si el método es correcto, porque no se tiene la seguridad de que las palabras utilizadas representan las longitudes de la base y la altura o simplemente dos lados.

¿Conocían los egipcios demostraciones o justificaciones de sus procedimientos? El papiro Rhind está escrito como un libro de ejercicios para estudiantes de la época, así que algunos autores consideran que, aunque Ahmes no formule ningún principio general, es muy probable que los conociera. Como fuere, el documento registra los problemas que debían resolver los escribas en asuntos de negocios y administrativos, y sus métodos de resolución son reglas prácticas conocidas por experiencia. No parece que los egipcios dispusieran de una estructura deductiva basada en axiomas.





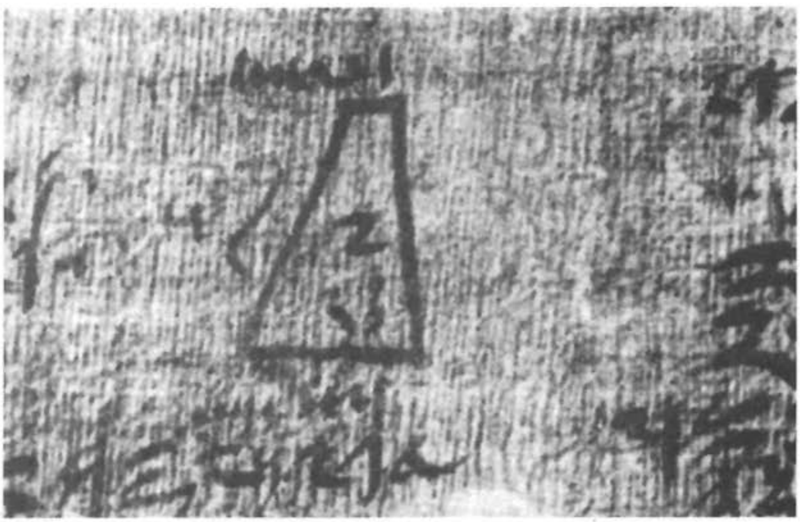


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Fragmento de la tablilla de arcilla BM 85194 en el que se aprecia una ilustración para calcular la amplitud de la base de una tumba con paredes en forma de anillo.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Relieve del muro sur de la mastaba de Ptahhotep y Akhethotep, altos funcionarios egipcios del siglo XXIV a.C. Frente a la figura representada, debajo de la mesa, se hallan inscritos en números egipcios las cantidades de alimentos necesarios para la vida en el más allá.

FOTO INFERIOR:
Detalle del papiro de Moscú donde se refiere el problema denominado «el tronco de pirámide».

LA INDIA

Resulta muy difícil trazar una imagen clara del desarrollo de las matemáticas en la India antigua. Por un lado, durante mucho tiempo, la transmisión de conocimientos matemáticos y científicos se realizó de forma oral, y por otro, la historia política de la India de aquel momento está llena de confusión. Alrededor del año 4000 a.C. se formó por primera vez en territorio indio una sociedad de clases, ubicada en la cuenca del Indo. Las ciudades más importantes fueron Harappa, Mohenjo Daro, Kot Diji y Lothal. Eran ciudades-estado con comercio y artesanía florecientes que llegaron a establecer relaciones comerciales con Asia Central, Mesopotamia o Arabia. La escritura de aquellas culturas todavía no ha podido ser descifrada, pero los hallazgos arqueológicos en la zona proporcionan información sobre sus conocimientos matemáticos.

Los antiguos indios utilizaban el sistema numérico decimal. Debían de emplear tableros de cálculo para llevar a cabo operaciones numéricas. Se han encontrado restos de un abaco en Mohenjo Daro. Entre las figuras geométricas que conocían se encontraban el cuadrado, el rectángulo, el triángulo, el círculo, el cono, el cilindro y el cubo. De hecho, utilizaban círculos entrelazados como ornamentos geométricos. Los adornos en jarrones y relieves sugieren que poseían conocimientos sobre proyecciones y semejanzas, que podían dividir segmentos por la mitad y en partes equidistantes, seccionar círculos en dos y cuatro partes y construir segmentos y sectores circulares, círculos concéntricos y líneas paralelas. Sin embargo, se desconoce cómo calculaban las áreas y volúmenes de las figuras geométricas elementales.

Las matemáticas habían gozado de gran consideración en la India desde tiempos remotos. El culto por los números y el budismo entablaron rápidamente una relación estrecha. Según la tradición, a los ocho años Buda ya había aprendido a leer, escribir y calcular, y más tarde, para pedir la mano de su esposa Yasodhara, tuvo que someterse a un examen de matemáticas y resolver el problema de obtener los átomos de una milla; en su resolución dio con un método de extensión en la sucesión de números: el

EL SISTEMA DECIMAL

El sistema decimal posicional y la forma de escritura de las cifras son, sin duda, la mayor aportación cultural y científica de los matemáticos indios al desarrollo de la humanidad. Actualmente, en todo el mundo se calcula siguiendo el método indio. La numeración india siempre utilizó el sistema decimal. En sánscrito había palabras fijas para las cifras 1 a 9 y para las potencias de 10. El desarrollo de este sistema fue posible gracias a la combinación de dos condiciones favorables: la existencia de nueve cifras en el uso estable de sistemas numéricos y el sistema de decenas tradicional definido por la construcción sistemática de la escala de potencias de 10. En la introducción del cero cumple también un importante papel el hecho de que los astrónomos indios conocieran los signos de vacío propios del sistema sexagesimal babilonio. En el siglo VI d.C. el sistema decimal estaba ya ampliamente extendido y desde el siglo VII se usó también el cero, que se representó inicialmente por un punto y más tarde por un aro pequeño. Los indios llamaban al cero *sunya*, es decir, «vacío». La traducción al árabe de «vacío» era *al-sifr*, de donde procede la palabra «cifra». Así, para denominar la grafía de los números se hace referencia al elemento fundamental, esto es, al cero.

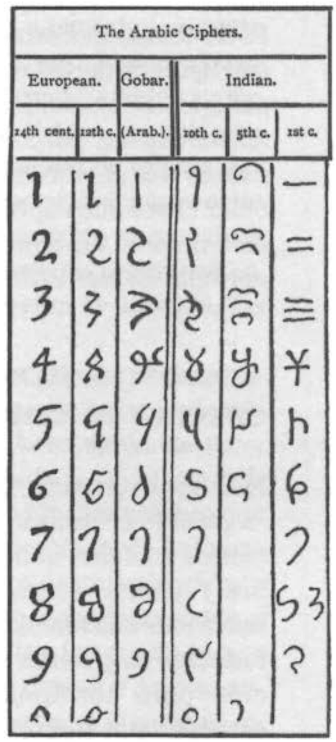


Tabla que muestra el desarrollo de los números arábigos en Europa y la India; ilustración realizada por el erudito británico del siglo XIX Isaac Taylor.

gigantesco número buscado lo precisó, según nuestro modo de escritura, como $384 \cdot 7^{13}$.

La transmisión de conocimientos matemáticos en la India se remonta hasta los tiempos en los que aparecieron los libros religioso-filosóficos, los *Veda*, esto es, en el II milenio a.C. A estas

primeras fuentes, aunque datadas ya entre los siglos VIII y II a.C., pertenecen también las llamadas «reglas de la cuerda», los *Sulvasutra*, instrucciones de carácter geométrico para la construcción de altares, para lo que se usaban cuerdas y cañas de bambú. Estos textos muestran sólidos conocimientos geométricos en los que aparece la determinación del área de figuras poligonales, resultados relacionados con el teorema de Pitágoras, cálculos de aproximación para diagonales (por ejemplo para $\sqrt{2}$), etc. En cuanto a la geometría del espacio, los antiguos indios sabían calcular el volumen aproximado de la pirámide y del tronco de esta, así como la superficie del cono. Además, para π utilizaron las aproximaciones 27/8 y 243/80, entre otras.

GRECIA Y LA CIENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

En las primeras civilizaciones que desarrollaron las matemáticas es posible encontrar una aritmética de números enteros y fracciones, incluida la notación posicional, los comienzos del álgebra y algunas fórmulas empíricas en geometría. Pero casi no había simbolismo ni existían abstracciones y formulaciones metodológicas generales o ideas sobre la necesidad de la demostración para confirmar un procedimiento. Aquellos pueblos carecían, por tanto, de concepción alguna de ciencia teórica, y no consideraban las matemáticas una disciplina independiente digna de cultivarse por sí misma. Para ellos, era una herramienta en forma de reglas simples, sin mayor efecto para su vida diaria que resolver situaciones concretas. El período decisivo en la fundamentación de las matemáticas tal y como se entienden hoy día fue la antigua Grecia.

La civilización griega se remonta al II milenio a.C. y se desarrolló en la Grecia moderna, el sur de Italia, el norte de África y Asia Menor, que fue quizá su lugar de origen. Desde el primer momento, aquel pueblo de grandes navegantes y apasionados aventureros entró en contacto comercial y cultural con los egipcios y los babilonios, y aunque tomó muchos elementos prestados

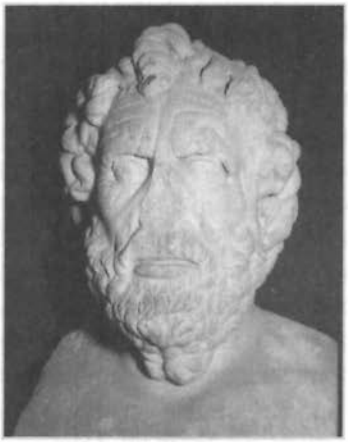
de sus vecinos, acabó erigiendo la civilización más original y pujante de su era, y, a la larga, la más influyente en la cultura occidental. La antigua Grecia protagonizó una de las épocas más brillantes en la historia del conocimiento.

Los griegos consideraban erróneamente a los egipcios como los fundadores de la ciencia, sobre todo de la agrimensura, la astronomía y la aritmética. Muchos griegos viajaron a Egipto y Babilonia para estudiar tales materias. Esta influencia fue muy sensible en la importante y rica ciudad comercial de Mileto, que estaba situada en Jonia, el territorio griego que ocupaba las costas de Asia Menor. A los puertos de Mileto llegaban los barcos de la Grecia europea, Fenicia y Egipto, y varias rutas de caravanas conectaban la ciudad con Babilonia. Allí nacieron la filosofía, las matemáticas y las demás ciencias griegas.

Posteriormente, las matemáticas clásicas griegas se desarrollaron en ciudades diversas de toda la geografía helena, donde grupos de pensadores se reunían alrededor de un sabio. Se sucedieron diversos centros de estudio, cada uno de los cuales se basaba en la obra de los anteriores. Es el mismo funcionamiento que sigue actualmente la ciencia: cuando un científico de primera línea se establece en una universidad o centro de investigación, a su alrededor suelen concentrarse otros expertos destacados y también jóvenes discípulos. La escuela jónica fue fundada por Tales en Mileto, y discípulos suyos fueron los filósofos Anaximandro y Anaxímenes. La leyenda asegura, como ya se mencionó en el primer capítulo, que Pitágoras pudo haber aprendido matemáticas de Tales.

Además de su obra filosófica, a Tales se le atribuyen muchos logros en el terreno científico, como el descubrimiento del poder de atracción de los imanes o de la electricidad estática, aunque destacan sus supuestas aportaciones matemáticas. La leyenda dice que, durante un viaje comercial a Egipto, calculó la altura de las pirámides a partir de la longitud de su sombra, que comparó con la altura de su bastón. Mediante el mismo uso de los triángulos semejantes, que son aquellos triángulos de un mismo plano cuyos ángulos tienen dos a dos igual medida, se asegura también que calculó la distancia de un barco a la costa. Pero sobre todo

TALES DE MILETO



Busto asociado a la figura de Tales de Mileto conservado en los Museos Capitolinos de Roma.

Tales de Mileto (ca. 630 a.C.-545 a.C.) consta como el primero y más famoso de los Siete Sabios de Grecia, el título que la tradición griega dio a siete personajes de los siglos VII-VI a.C. por su sabiduría práctica en disciplinas diversas del conocimiento. En realidad, no se sabe si Tales nació en Mileto o era de origen fenicio, como asegura Heródoto, pero sí está documentada su actividad en la ciudad primero como comerciante y después como legislador, matemático y astrónomo. Parte de sus actividades comerciales se desarrollaron en Egipto, donde, al parecer, aprendió mucho de matemáticas. Según la tradición, Tales predijo el eclipse lunar del 8 de mayo de 585 a.C., pero, teniendo en cuenta los conocimientos de astronomía de la época, parece un logro bastante difícil de creer. Cuando Aristóteles le atribuyó el disputado título de «padre de la filosofía griega» posiblemente se estaba refiriendo a su papel como fundador de la filosofía jónica. Ciertamente las preguntas que se hizo Tales, qué son las cosas y cuál es el principio de los cambios, plantearon el problema central de la filosofía y dieron el comienzo histórico de su madurez.

se le atribuyen las demostraciones deductivas de algunos famosos teoremas que, según la tradición, se usaban desde hacía tiempo, pero solo entonces fueron enunciados e incluso demostrados. Se ha llegado a decir que enunció y demostró el mismo teorema de Pitágoras. En todo caso, Tales dio nombre a dos teoremas principales:

— Primer teorema de Tales: si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene otro triángulo semejante (figura 1).

— Segundo teorema de Tales: sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C. Entonces el ángulo ABC, es recto (figura 2).

La paternidad más extraordinaria de todas las que se han concedido a Tales es la definitiva: se le atribuye la transformación de las matemáticas en una ciencia abstracta. En rigor, no es posible afirmar tal cosa, comenzando por el hecho de que la ciencia, según el concepto moderno, no comienza hasta el siglo XVI con la revolución científica, pero no cabe duda de que los tres grandes milesios, Tales, Anaximandro y Anaxímenes, fueron los primeros precursores en el camino de las matemáticas.

El silencio de las fuentes documentales da fe de la esterilidad intelectual de Jonia desde la muerte del filósofo Anaxímenes, hacia el año 524 a.C., hasta la toma de Mileto por los persas en 494 a.C. Sin embargo, la escuela de Mileto continuó viva. Las grandes ideas y descubrimientos milesios ejercieron un poderoso influjo en los pensadores posteriores, aunque siguiesen caminos distintos. La figura cronológicamente más próxima a la escuela de Mileto es la de Pitágoras, y de hecho, la historia del conocimiento considera que los pitagóricos recogieron la antorcha de los milesios.

FIG. 1

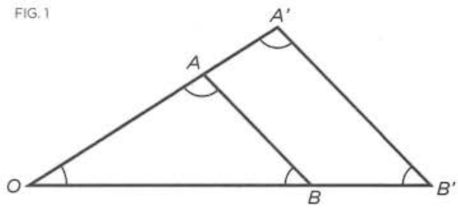
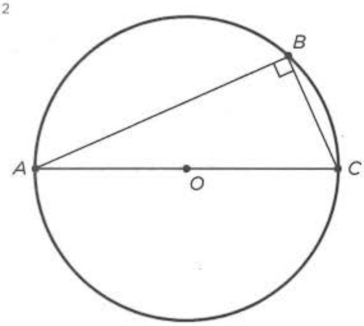


FIG. 2



Como se ha dicho, no se sabe con seguridad qué se puede atribuir a Pitágoras o a sus discípulos, así que cuando se habla de la obra matemática de los pitagóricos, en realidad se contemplan las aportaciones de todo el grupo hasta el año 400 a.C. En el conjunto de los pitagóricos destacan Filolao (ca. 470-385 a.C.) y Arquitas (ca. 435-347 a.C.).

EL SAGRADO NÚMERO

Los conceptos matemáticos y geométricos de todas las civilizaciones prehelénicas estaban ligados a la materia. Por ejemplo, para los egipcios, una recta era una cuerda tensa o el borde de un terreno. La primera gran contribución griega a las matemáticas fue el reconocimiento consciente de que los objetos matemáticos, los números y las figuras geométricas, son abstracciones, ideas producidas por la mente, distintas de los objetos físicos. Este reconocimiento se atribuye a los pitagóricos. Pero, en todo caso, se diría que no siempre pensaron así.

El capítulo V del Libro I de la *Metafísica* de Aristóteles está centrado en buena parte en los pitagóricos y en describir y analizar la doctrina de los números. De hecho, el texto del Estagirita es la exposición sobre filosofía pitagórica más respetada por los expertos. El citado capítulo contiene una aproximación clara y concisa, y por ello magistral:

> [Los filósofos pitagóricos] supusieron que las cosas existentes son números, pero no números que existen aparte, sino que las cosas están realmente compuestas de números, es decir, los elementos de los números son los elementos de todos los seres existentes y la totalidad del universo es armonía y número. Su razón consistía en que las propiedades numéricas eran inherentes a la escala musical, a los cielos y a otras muchas cosas.

Es decir, que cuando los primeros pitagóricos decían que todos los objetos estaban compuestos por números o que estos eran la esencia del universo, lo decían en sentido literal. Salvando todas las distancias, podría decirse que los pitagóricos concebían los números como la ciencia actual concibe los átomos.

Pero, ¿a qué se referían exactamente cuando hablaban del «número»? Los pitagóricos usaban tres definiciones: número es una «multitud limitada», una «combinación o amontonamiento de unidades» y una «cantidad que fluye». Este «amontonamiento de unidades» lo representaban mediante puntos en la arena o mediante guijarros, con los que dibujaban formas. Algunos autores

han indicado que los pitagóricos de los siglos VI y V a.C. no distinguían los números de los puntos geométricos, que entendían como esferas minúsculas. En realidad, representar los números mediante hileras de puntos, sucesiones de signos o piedras dispuestas en dibujos regulares era una costumbre muy anterior y primitiva, que perduraría durante milenios, dando a la aritmética la forma geométrica con que se entendió ampliamente en Grecia. No en vano el propio término «cálculo» deriva de la palabra latina *calculus*, que designa la piedra con que se calcula, y aún hoy hablamos de cuadrados y cubos de los números, términos que proceden de las representaciones pitagóricas.

Un solo punto era el principio de todas las cosas y carecía de dimensiones, dos puntos formaban una recta y constituían la dimensión 1, tres puntos no alineados eran un triángulo o área de dimensión 2, y cuatro puntos que no estuvieran en el mismo plano formaban un tetraedro o volumen de dimensión 3 (figura 3).

Este concepto se aplicaba asimismo a la generación de figuras geométricas. No había más que reemplazar la progresión aritmética que describía las primeras figuras por la progresión geométrica, con lo que la secuencia punto, línea, triángulo, tetraedro, se convertía en punto, línea, cuadrado, cubo (figura 4).

En su concepción geométrica del número, los pitagóricos identificaban puntos cuya combinación constituía unidades supe-

FIG. 3

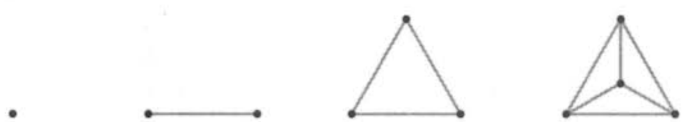
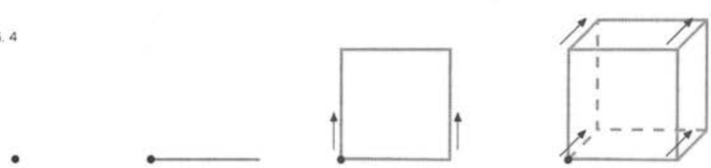


FIG. 4



riores, de complejidad creciente: los puntos formaban líneas; las líneas, planos; los planos, superficies, y las superficies, cuerpos sólidos. Pero el siguiente paso es el más característico, osado y extraño a la mentalidad actual. Para los pitagóricos, el cosmos y su devenir eran una consecuencia natural de los números. Si estos eran el medio a través del cual se manifestaba la realidad, conocer sus propiedades y relaciones equivalía a conocer la mecánica del universo, una mecánica mágicamente armónica, como demostraban las increíbles manifestaciones numéricas que descubrían las matemáticas. En este «misticismo numérico», el matemático era el teólogo que debía desvelar el orden divino. En este salto metafísico se manifiesta la compleja combinación entre el Pitágoras religioso, en la línea del pensamiento mágico, y el Pitágoras sabio, en la línea del pensamiento lógico, que tiene como resultado un Pitágoras mago de los números.

LA DÉCADA PITAGÓRICA

El estudio pitagórico de los números comenzó como una búsqueda espiritual, similar a la de la cábala hebrea, en la que cada número tenía una identidad simbólica que lo dotaba de virtudes mágicas y hasta de propiedades vitales. Los diez números pitagóricos, que no incluían el cero, pero sí el diez, eran la «década».

El 1 era el generador de todos los números, pues a partir de él puede crearse cada número por adición repetida. Pitágoras lo llamaba la «mónada» y lo consideraba el manantial infinito de donde surgían todos los seres. No se trataba propiamente de un número, sino que era anterior a todo número, principio y causa universal. Simbolizaba la razón, lo definido y lo estable. Se asociaba lógicamente con lo impar, y de manera menos comprensible, con el lado derecho. Se tomaba también como símbolo de inmutabilidad aritmética:

$$\left(1\cdot 1=1, \frac{1}{1}=1, 1^1=1\right).$$

El 2 era la dualidad, la diversidad, lo indefinido. Pitágoras lo llamaba la «díada». Simbolizaba la materia, la imperfección y los contrastes. De él surgía el perpetuo fluir y la generación, por lo que se consideraba el principio femenino. Matemáticamente, sintetizaba lo par y la división. También recibía el nombre de «primer crecimiento» porque se formaba como 1 + 1. Introducía la primera dimensión, con longitud pero sin anchura ni profundidad, una dimensión imperfecta, pues no es posible construir una figura con dos puntos o dos líneas. Se asociaba con el lado izquierdo.

El 3 era la tríada y se formaba a través de la acción de la mónada sobre la díada ($1+2=3$). Por ese motivo se consideraba símbolo de perfección, de armonía entre la unidad y la diversidad, y se le daba carácter masculino. Se relacionaba con la idea del tiempo, tomándolo como síntesis del principio-medio-fin o del pasado-presente-futuro. De ese aspecto sagrado derivaría la costumbre ritual de repetir algunos gestos o acciones hasta tres veces. Introducía la segunda dimensión.

El 4 era una de las claves de la naturaleza y del hombre. Significaba la ley universal e inexorable, puesto que ($4=2+2$). Era a la vez causa y efecto de cuantos grupos de cuatro podían hallarse en la naturaleza, como los elementos (tierra, agua, fuego y aire), los puntos cardinales o las estaciones del año, pero también la división de las matemáticas según los pitagóricos (aritmética, música, geometría y astronomía), de donde derivó el *quadrivium* medieval. Era el cuadrado del primer número par y se consideraba dotado de perfección y armonía porque ($2+2=2\cdot 2$). Introducía la tercera dimensión.

El 5 era la unión de la díada y la tríada, de lo femenino y lo masculino, y así, símbolo del matrimonio ($2+3=5$) y del triángulo divino ($3^2+4^2=5^2$). Cinco eran también los poliedros regulares, sólidos cuyas caras son polígonos regulares idénticos: el tetraedro (4 triángulos), el hexaedro o cubo (6 cuadrados), el octaedro (8 triángulos), el dodecaedro (12 pentágonos) y el icosaedro (20 triángulos). Además, era el centro aritmético de los nueve primeros números de la década 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, así como la media aritmética de sus equidistantes: 1 y 9, 2 y 8, 3 y 7, 4 y 6. La gran relevancia de este número lo convirtió en el emblema pitagórico.

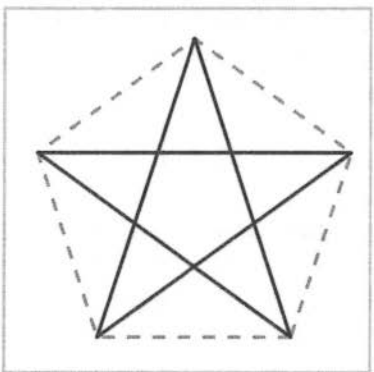
Aun más sagrado que el 5 era el 6, símbolo de la procreación y de la familia, puesto que suponía la unión del principio femenino y el principio masculino a través del producto ($6=2\cdot3$). Estaba teñido de misticismo, pues regulaba los intervalos de tiempo entre cada reencarnación. Era, además, el área del triángulo divino 3-4-5. Pero, sobre todo, constituía el primer número perfecto, una tipología de números de los que se hablará en breve.

El 7 era la «virgen sin madre», pues no podía engendrarse por ningún otro número de la década ni él engendrar número alguno. Asociado a la salud y la luz, siete eran las notas musicales y los astros que daban nombre a los días de la semana. Era un número con singularidad geométrica, porque el círculo no puede ser dividido en siete partes iguales por ninguna construcción conocida.

El 8 simbolizaba la amistad, la plenitud y la reflexión. Ejercía su influencia en todo el cosmos a través de las ocho esferas que podían verse desde la Tierra (Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno y las estrellas fijas). Se trataba del primer número cubo (2^3) y su plenitud provenía de ser la suma de dos cuadrados iguales ($8=4+4$).

EL PENTALFA

El pentagrama místico, o pentalfa, era una estrella de cinco puntas. Los pitagóricos utilizaban este emblema secreto para identificarse porque sus muchas y hermosas propiedades lo habían convertido en uno de los tópicos geométricos más importantes de la hermandad. La más curiosa de ellas era la unicursalidad, es decir, que podía ser trazado por el movimiento de un punto sin pasar dos veces por el mismo lado. El pentalfa se obtenía al trazar las diagonales de un pentágono regular, o prolongando sus lados.



El 9 era el símbolo del amor y de la gestación, pues esos son los meses que generalmente dura la gestación humana. Se relacionaba con la justicia porque sus factores son iguales ($9 = 3 \cdot 3$). Era el cuadrado del primer número impar (3^2).

> «¡Lo juro por Aquel que ha dado a nuestro alma la *tetraktys*, fuente y raíz de la naturaleza eterna!»
>
> — Juramento pitagórico recogido por los *Versos de oro*.

Finalmente, el 10 era el símbolo de Dios y del universo. Puesto que los cuatro primeros números contenían para los pitagóricos el secreto de la escala musical, su suma ($10 = 1 + 2 + 3 + 4$) se consideraba la perfección, la síntesis de la naturaleza toda del número. Su contenido matemático es insondable: contiene tanto pares como impares y es el primero que contiene tantos números primos (1, 2, 3, 5, 7) como compuestos (4, 6, 8, 9, 10).

Como principio y fundamento de todo, el 10 era la máxima expresión del misticismo numérico de los pitagóricos. Lo representaban mediante diez puntos o guijarros dispuestos en forma de triángulo equilátero (figura 5). A este anagrama, representación visual y geométrica de que $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, lo llamaron «la *tetraktys* de la década». *Tetraktys* significaba «tétrada» o «cuatedrad», en referencia a su constitución por medio del 4, lo que permitiría entender la palabra como «cuaterna básica». Tenía una significación mística similar a la del pentalfa y se usaba para hacer el juramento pitagórico.

LOS NÚMEROS POLIGONALES

La representación pitagórica de los números mediante puntos o guijarros produjo una clasificación según las formas poligonales de sus distribuciones. De este modo los números poligonales asociaban el número con la forma geométrica de un polígono regular, abriendo un nuevo mundo de propiedades y relaciones. Esta

clase de álgebra geométrica fue la precursora de la actual álgebra simbólica.

Así, los números 1, 3, 6, 10, 15... se denominaban triangulares porque los puntos podían distribuirse en forma de triángulo equilátero (figura 5).

El cuarto número triangular era el sagrado 10 y su representación también expresaba la maravilla de su «cuatredad», pues, como se puede comprobar en la figura 5, tiene cuatro puntos en cada lado. Los pitagóricos comprobaron que las sumas, 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, $1+2+3+4+5$ tenían como resultado los números triangulares. En general,

$$1+2+\ldots+n=n\cdot\frac{(n+1)}{2}.$$

Los números 1, 4, 9, 16, 25... recibieron el nombre de números cuadrados debido a que sus puntos pueden distribuirse formando cuadrados (figura 6). Se formaban a partir de los números de la serie impar: 1, 4 $(1+3)$, 9 $(1+3+5)$, 16 $(1+3+5+7)$, 25 $(1+3+5+7+9)$... Los números compuestos (o no primos) que no eran cuadrados perfectos recibían el nombre de oblongos.

A continuación se contaban los números pentagonales, 1, 5, 12, 22, 35..., que componían pentágonos (figura 7). Se formaban a partir de la serie 1, 4, 7, 10, 13... del siguiente modo: 1, 5 $(1+4)$, 12 $(1+4+7)$, 22 $(1+4+7+10)$, 35 $(1+4+7+10+13)$... El número pentagonal n es

$$\frac{3n^2-n}{2}.$$

Obviamente, los números hexagonales, 1, 6, 15, 28, 45... componían hexágonos (figura 8). Se formaban a partir de la serie 1, 5, 9, 13, 17..., como se muestra a continuación: 1, 6 $(1+5)$, 15 $(1+5+9)$, 28 $(1+5+9+13)$, 45 $(1+5+9+13+17)$... Y, en general, $2n^2-n$.

A partir de las distribuciones geométricas de los puntos, aparecían como evidentes ciertas propiedades de los números enteros. Por ejemplo, trazando una línea recta en la forma del número

FIG. 5

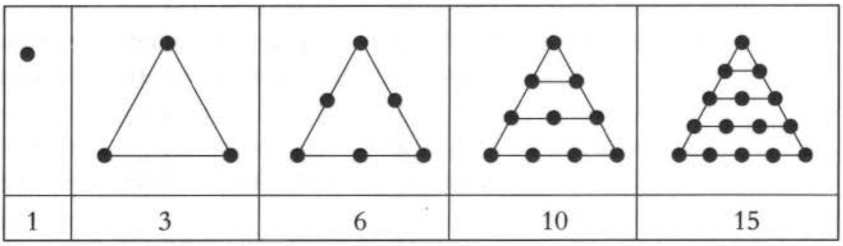


FIG. 6

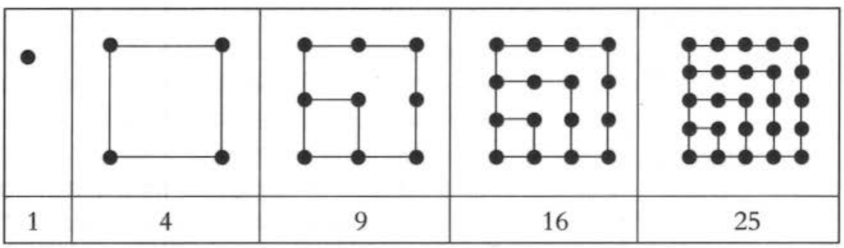


FIG. 7

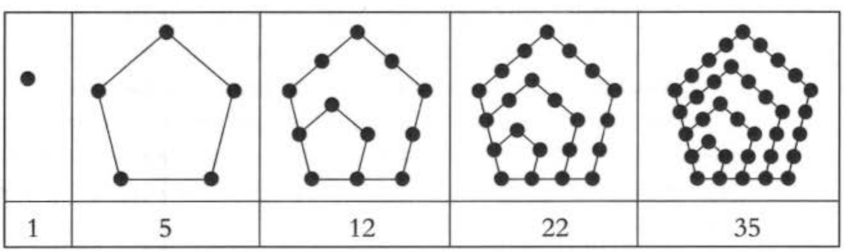


FIG. 8

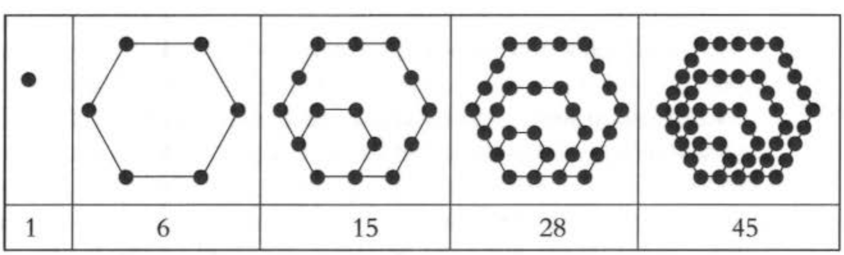


FIG. 9

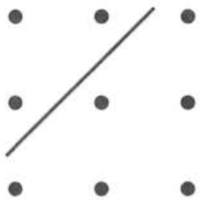
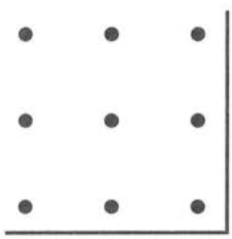


FIG. 10



cuadrado 9, como aparece en la figura 9, se descubre que la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado. Es posible comprobar que tal cosa es verdad en general, aunque no es probable que los pitagóricos pudieran demostrar esta conclusión, que se presenta a continuación en notación moderna.

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=(n+1)^2.$$

Para pasar de un número cuadrado al siguiente, los pitagóricos seguían el esquema reproducido en la figura 10. Unían los puntos a la derecha y abajo con una línea quebrada en forma de ángulo recto que ellos llamaban *gnomon*, un término que significaba «escuadra de carpintero». El *gnomon* está formado por los puntos situados en el borde, que aumentan de dos en dos a cada paso de la serie. Si a un número cuadrado cualquiera se le añade su *gnomon* más la unidad, se obtiene el número cuadrado de valor superior siguiente. Así, lo que los pitagóricos descubrieron era que $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$. Además, si se parte del 1 y se añade el *gnomon* 3 y después el *gnomon* 5, y así sucesivamente, resulta que $1+3+5+\ldots+(2n+1)=n^2$.

CLASES DE NÚMEROS

El mundo numérico de los pitagóricos era muy rico. Pitágoras y sus seguidores identificaban muchos tipos de números, que clasificaban de manera meticulosa, y les atribuían características morales y físicas. Por ejemplo, los números impares eran masculinos, y los pares, femeninos. Algunos números eran amistosos y compatibles, pero otros eran malvados y no se llevaban bien con

los demás; podían traer mala fortuna a la humanidad. El resultado de esta clasificación era una construcción intelectual impenetrable, solo posible de comprender desde la óptica de la mística pitagórica. En el Libro VII de los *Elementos*, Euclides intentó recoger todo ese mundo y presentarlo con la máxima claridad de que fue capaz. Las categorías y definiciones que se presentan a continuación corresponden al gran compilador y geómetra.

La primera gran familia era la de los números pares e impares, la definición pitagórica de los cuales es indiscutible: un número par es el que puede ser dividido en dos partes iguales o desiguales (excepto la díada, que solo puede dividirse en dos partes iguales), siendo estas partes de la misma especie, par o impar. Un número impar es el que solo puede dividirse en partes desiguales y de especies distintas, una par y la otra impar. Estos números se subdividían en cuatro clases:

— Parmente pares: aquellos cuya mitad es par.

— Imparmente pares: aquellos cuya mitad es impar.

— Parmente impares: aquellos que, al ser divididos por un número impar, dan uno par.

— Imparmente impares: aquellos que no tienen más que divisores impares.

A continuación se abría el linaje de los números incompuestos y los secundarios, una manera pitagórica, y por tanto abstrusa, de decir números primos y números compuestos, y de tratar, en general, los números divisores de otros o múltiplos de otros. Para mayor claridad, a continuación se presentan los números primos en términos modernos, pues la definición original pitagórica, en términos de mensurabilidad, es algo complicada:

— El número primo (incompuesto) es el que solo puede dividirse por la unidad y por sí mismo.

— El número compuesto (secundario) es aquel que no es primo.

— Los números primos entre sí son los que tienen la unidad como divisor común.

— Los números compuestos entre sí son los que tienen algún divisor común mayor que la unidad.

Seguían los números lineales, los planos, los sólidos, los cuadrados y los cúbicos. Los lineales son aquellos que no tienen divisores; los planos son el producto de dos números que son sus lados; los sólidos son el producto de tres números que son sus lados; los cuadrados son el producto de un número por sí mismo; los cúbicos son el producto de un número por sí mismo dos veces. A estos se pueden añadir los oblongos, que son números planos que difieren en una unidad.

Se llamó números perfectos a aquellos iguales a la suma de sus divisores, incluido el 1, pero no el propio número, como por ejemplo el 6, pues sus divisores propios son 1, 2 y 3. Los griegos conocían solo cuatro números perfectos. Los siguientes tres son 28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14), 496 (= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + + 248) y 8 128 (= 1 + 2 + 4 + + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + + 1 016 + 2 032 + 4 064). Actualmente, se conocen 43, todos pares. No se sabe si hay números perfectos impares ni si la cantidad de números perfectos es finita o infinita.

Junto a los perfectos se encontraban los números abundantes y los deficientes: los que excedían a la suma de sus divisores eran abundantes, y a los que eran menores que dicha suma, deficientes.

A dos números se los llamó amigos cuando cada uno de ellos era igual a la suma de los divisores del otro. Los pitagóricos solo conocían el 220 y el 284:

— 220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 (la suma de los divisores de 284).

— 284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 (la suma de los divisores de 220).

Además de las relaciones numéricas que estructuran esta clasificación, los pitagóricos también estudiaron todo tipo de razones y proporciones que contenían para ellos la belleza más singular. Por ejemplo, la media aritmética, la media geométrica, la media armónica... Si se considera que p y q son dos números, la media aritmética A es

$$\frac{p+q}{2},$$

la media geométrica G es $\sqrt{pq}$ y la media armónica H, que es el recíproco de la media aritmética de $1/p$ y $1/q$, es

$$\frac{2pq}{(p+q)}.$$

A continuación, es posible comprobar que G es la media geométrica de A y H; es decir, que la media geométrica de dos números es la media geométrica de sus medias aritmética y armónica. A la hora de armonizar las tres medias, la proporción

$$\frac{A}{G}=\frac{G}{H}$$

recibió el nombre de proporción perfecta por su claridad y simplicidad, y la proporción

$$\frac{p}{\frac{p+q}{2}}=\frac{\frac{2pq}{p+q}}{q}$$

se llamó proporción musical por la belleza matemática de su planteamiento y su desarrollo, un auténtico goce estético para el iniciado.

CAPÍTULO 5

La armonía del cosmos

En busca del fundamento matemático de la armonía musical, los pitagóricos se convirtieron en los primeros que aplicaron las matemáticas a la descripción de las leyes naturales. El vínculo que establecieron entre aritmética, geometría y música convirtió el arte musical en una rama de las matemáticas. Además, al trasladar al cosmos las relaciones numérico-musicales construyeron una cosmología en la que los movimientos de los astros emitían tonos musicales en la más perfecta armonía: la «música de las esferas».

Las civilizaciones anteriores a la griega concebían la naturaleza como un mundo caótico y terrorífico. Los sucesos naturales estaban manipulados por dioses con los que solo podían comunicarse sacerdotes y magos. Parece que alrededor del año 600 a.C. pudo comenzar a surgir una actitud intelectual nueva, de carácter racional y crítico, que, no del todo satisfecha con las explicaciones mitológicas de los fenómenos naturales, especuló con la idea de una naturaleza ordenada y bien diseñada, que la potente mente humana podía desentrañar.

Como se ha visto, fueron los filósofos jonios los primeros en emplear el uso de la razón para intentar determinar la naturaleza de la realidad, que ellos centraron en una sustancia que permanecía inmutable a través de todos los cambios aparentes. Con todo, en ningún momento la filosofía natural sustituyó a los mitos. La nueva forma de pensar asomó con timidez en el seno de pequeños grupos de intelectuales, que, aun así, tampoco podían dejar de expresarse según los mitos y de seguir los rituales de sus mayores, inscritos en su cultura, como la mayor parte de la población, que continuaba siendo profundamente religiosa y aceptaba las supersticiones.

En general, aquellos primeros intelectuales griegos no invirtieron demasiado tiempo en dar explicaciones sobre los motivos que les habían llevado a construir sus teorías y se concentraron en presentarlas con el máximo rigor deductivo. El historiador de la

ciencia actual se encuentra falto de recursos a la hora de intentar precisar con rigor por qué los griegos desarrollaron un instrumento científico tan poderoso como las matemáticas. Por lo que parece, su motivo fue el deseo de comprender el mundo físico; sus investigaciones en astronomía, óptica y música sugirieron problemas que impulsaron el desarrollo de las matemáticas para su aplicación a estas áreas. Durante largo tiempo los límites de las matemáticas no fueron propiamente matemáticos.

El primer grupo importante que presentó una filosofía matemática de la naturaleza fue la secta de los pitagóricos. No hay duda de que su pensamiento religioso era místico, pero su filosofía natural era claramente racional. Sus miembros se asombraban ante el hecho de que fenómenos que eran de muy diferente índole desde el punto de vista cualitativo, presentaran propiedades matemáticas idénticas. Por tanto, estas propiedades debían ser la esencia de tales fenómenos. Como pensaban en los números a la vez como puntos y como partículas elementales de materia, el número era la materia y la forma del universo y la causa de todo fenómeno.

MÚSICA PITAGÓRICA

PÁGINA CONTIGUA: **Grabado sobre madera perteneciente a la obra *Teoría musical* del compositor y musicólogo renacentista Franchino Gaffurio (1492). La primera viñeta muestra al bíblico Jubal como «padre de cuantos tocan la cítara y la flauta» y las otras tres están dedicadas a los experimentos musicales de Pitágoras.**

La palabra «música» tiene su origen en el término griego *musiké*, que se traduce literalmente como «el arte de las musas». En la mitología griega las musas eran las diosas inspiradoras de la música, la danza, la astronomía y la poesía. Por otra parte, el hecho musical es efímero, y tiene su existencia en la memoria; ocurre en el tiempo y es aparentemente inaprensible. Estas características, entre otras, dotan a la música de un aura mágica que ha inducido al hombre a emplearla en sus rituales desde el principio de los tiempos, y la ha convertido en un vehículo privilegiado de adoración a la divinidad. La música acabó adoptando una posición central en el concepto del cosmos de Pitágoras y los pitagóricos.

La leyenda dice que un día, caminando por la calle, el sabio de Samos escuchó los martillazos que provenían del taller de un herrero. Se acercó a observar y vio que el sonido se originaba por las


IV BAL
PYTACORA
PITAGORAS
PYTACORA
PHYLOLAVS

vibraciones del metal golpeado por el martillo; las piezas más largas producían sonidos más graves. A partir de ahí, experimentó con campanas y vasos de agua e investigó las vibraciones de las cuerdas en la cítara, la lira y el monocordio —un instrumento de una sola cuerda cuya invención se le atribuye— hasta lograr definir una relación general entre su longitud y la altura del sonido que producen.

Lo más probable es que los hechos no sucedieran como la fábula pretende, pero se ha señalado repetidamente que Pitágoras era un entendido en el arte musical, al que otorgaba propiedades benéficas. El sabio estudió las leyes de la acústica y fue el primero en encontrar una relación entre los números y los sonidos armónicos, es decir, aquellos cuya manifestación simultánea causa una sensación agradable al oído. Con ello regaló al mundo la primera teoría matemática de la música, y, a la vez, dio el paso decisivo para eliminar la arbitrariedad de la investigación sobre la naturaleza y reducir la apariencia de caos a un modelo comprensible y ordenado. La trascripción de la música a una relación entre números fue posible para los pitagóricos cuando descubrieron dos hechos:

— El sonido producido por una cuerda pulsada depende de la longitud de la cuerda.

— Los sonidos armónicos son producidos por cuerdas igualmente tirantes cuyas longitudes respectivas estén en razón igual a las razones de números enteros.

Los pitagóricos estudiaron con detalle el tañido de la única cuerda del monocordio, cuya longitud modificaban del modo en el que se pisa la cuerda de una guitarra moderna. Al variar la longitud de la cuerda, esta generaba distintas notas musicales. Cuanto más corta era la cuerda, más «alta» o aguda era la nota resultante. A continuación, compararon parejas de sonidos producidos con distintas longitudes de cuerda y descubrieron algo sorprendente: los sonidos provocados por cuerdas de largos relacionados con números pequeños, dividiendo las cuerdas a la mitad, a la tercera parte, a dos tercios de la longitud original..., generaban los sonidos más agradables, es decir, los más armónicos al oído. De este modo, las

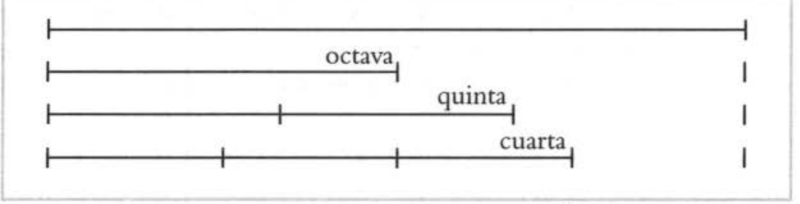
longitudes relativas en toda combinación armónica de cuerdas pulsadas se podían expresar como una razón de números enteros. Gracias a estas observaciones, los pitagóricos lograron establecer un modelo matemático de un fenómeno físico, pero teniendo la mirada puesta en lo estético, algo similar a lo ocurrido con la proporción áurea y el concepto de belleza en el Renacimiento.

Las relaciones armoniosas que encontraron los pitagóricos son las mismas que se enseñan hoy día en cualquier escuela de música:

— La octava: la relación más sencilla es la que se obtiene al pisar la cuerda en la mitad de su longitud, es decir, pulsando dos cuerdas igualmente tensas si la longitud de una de ellas es igual al doble de la de la otra. Esta relación se expresa numéricamente como 2:1. En lenguaje musical, el intervalo entre las dos notas es una octava; por ejemplo, la distancia existente entre un *do* y el siguiente *do*.

— La quinta: es aquella combinación armónica en la que la cuerda se pisa en un punto situado a un tercio de la longitud total, es decir, que está formada por dos cuerdas cuyas longitudes están en la relación de 3 a 2, o 3:2. En este caso, la más corta da una nota llamada la quinta inferior de la dada por la primera cuerda, lo que en lenguaje musical se denomina simplemente una quinta (la distancia *do-sol*).

— La cuarta: aquella en la que se pisa la cuerda a un cuarto del total, lo que numéricamente se expresa con la relación 4:3, mientras que en el ámbito musical corresponde a un intervalo de cuarta (la distancia *do-la*).



La octava, la quinta y la cuarta —los tres intervalos musicales estudiados por los pitagóricos— respecto a la longitud total de la cuerda.

De este modo emerge un patrón según el cual los intervalos de sonidos relacionados por fracciones de la forma

$$\frac{n+1}{n}$$

son armónicos y agradables. Los pitagóricos elevaron este hecho a la categoría de confirmación oficial de que existía una relación directa y comprobable entre el número y lo armónico, lo bello. Organizaron sus escalas basándose en simples relaciones numéricas entre los distintos sonidos. Así, la escala pitagórica se estructura sobre los dos intervalos más sencillos: la octava, que presenta una relación de frecuencias entre las notas de 2/1, y la quinta, de relación de frecuencias 3/2. Los pitagóricos obtuvieron los diferentes sonidos de la escala encadenando quintas, y apelando luego a lo que se denomina «cancelación de octavas», es decir, dividiendo o multiplicando por 2, para situar esas notas en el rango buscado.

El proceso es como sigue (tomando como punto de partida el *do* por costumbre cultural, pues es posible recorrer toda la escala comenzando por cualquier nota). En primer lugar, se calcula la relación de la primera quinta ascendente, para obtener un *sol*. Un nuevo encadenamiento nos llevará a un *re*, para seguir con un *la*, un *mi* y, finalmente, un *si*. Tomando ahora una quinta descendente desde el *do* inicial, se consigue el *fa*. De este modo, se obtienen los siete sonidos de la escala:

fa ← *do* → *sol* → *re* → *la* → *mi* → *si*.

Si se continúa con el encadenamiento de quintas es posible alcanzar los doce sonidos de la llamada «escala cromática», también llamada «dodecáfona», que contiene los doce semitonos de la escala temperada occidental. Este es el sistema de afinación más utilizado actualmente en la música occidental y se basa en el semitono temperado, igual a la doceava parte de la octava y de razón numérica raíz doceava de 2, con una amplitud interválica de 100 cents (un cent es una centésima de semitono),

sol♭ ← *re*♭ ← *la*♭ ← *mi*♭ ← *si*♭ ← *fa* ← *do* → *sol* →
re → *la* → *mi* → *si* → *fa*♯.

LOS CENTS

En acústica musical, el cent es la menor unidad de medida logarítmica que se emplea para medir con precisión absoluta intervalos musicales. Equivale a una centésima de semitono. Un intervalo de 1 cent es tan pequeño que escapa a la percepción humana. Como, a su vez, 12 semitonos conforman una octava, el cent es un número c tal que:

$$(c^{100})^{12} = 2 \Rightarrow \qquad c^{1200} = 2 \Rightarrow \qquad c = \sqrt[1200]{2}.$$

donde los símbolos *bemol* (♭) y *sostenido* (♯) designan ajustes de un semitono inferior y superior, respectivamente.

Obtenidas las doce notas mediante sucesivos encadenamientos de quintas, bastará luego con situar los sonidos en la misma escala en el rango de una única octava mediante el procedimiento de cancelación de octavas.

MATEMÁTICAS SONORAS

Habiendo presentado los conceptos previos necesarios, ya es posible determinar la afinación de cada nota por encadenamientos de quintas y «cancelaciones» de octavas, de modo que, como no debe olvidarse, el valor de sus frecuencias relativas se encuentre siempre entre 1, que es la relación que mantiene el *do* consigo mismo, y 2, que es la relación que mantiene el *do* con el *do* de la siguiente escala. Primero se determina el *sol*, que está a una quinta del *do*:

$$sol = \frac{3}{2} \text{ del } do,$$

circunstancia que escribiremos, para simplificar:

$$sol = \frac{3}{2}.$$

A continuación se determina el *re*, que se encuentra a una quinta del *sol*. Ello se consigue multiplicando por 3/2, pero teniendo que cancelar una octava, lo que resulta de multiplicar por 1/2 o dividir por 2. La distancia de *do* a *re* se llama «tono». De hecho, el tono es la distancia típica entre dos notas, que en sistema temperado es igual a un sexto de octava y, lógicamente, equivale a dos semitonos. Efectuando una elemental multiplicación obtenemos el intervalo del *re* con respecto al *do*:

$$re = sol \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad re = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad re = \frac{9}{8}.$$

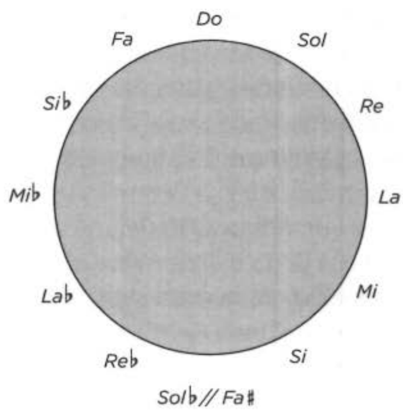
Luego se determina el *la*, que se encuentra a una quinta del *re*:

$$la = re \cdot \frac{3}{2} \qquad la = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} \qquad la = \frac{27}{16}.$$

El *mi* está a una quinta del *la*, pero teniendo que «cancelar» una octava:

$$mi = la \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad mi = \frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad mi = \frac{81}{64}.$$

La escala se completa con el *si*, a una quinta del *mi*, y el *fa*, una quinta por debajo del *do*, y subiendo una octava (multiplicando por 2). Así se conforma lo que se conoce como el «círculo de quintas», representado en la figura.



En suma, tomando el *do* con valor normalizado a 1, se establece la siguiente tabla:

Nota	*Do*	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do*
Relación de frecuencias	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Este proceso se puede continuar para determinar las afinaciones de las teclas negras de un piano, o bemoles, descendiendo por quintas desde el *fa*.

Nota	*Re*♭	*Mi*♭	*Sol*♭	*La*♭	*Si*♭
Relación de frecuencias	256/243	32/27	1024/729	128/81	16/9

Al ascender una quinta de *si*, se llega al *fa*♯, que debería ser el mismo sonido que el *sol* ♭ alcanzado en el otro extremo tras hacer las cancelaciones de octava correspondientes. Pero estos dos sonidos no son exactamente iguales: la diferencia entre el *fa*♯ y el *sol* ♭ se denomina «coma pitagórica». Del mismo modo, tras hacer las cancelaciones de octava correspondientes, los sonidos extremos *fa*♯-*re*♭ no se encuentran a la distancia de una quinta justa, sino que forman un intervalo que difiere de ella en una coma pitagórica. Esta quinta ligeramente más pequeña se denomina la «quinta del lobo».

El armado del círculo de quintas involucra el encadenamiento de doce quintas, llegando a una nota que es «casi» la misma que la del comienzo, solo que a una distancia de siete octavas, tal y como muestra el teclado de la página siguiente.

Esa distancia de siete octavas es la coma pitagórica. Se puede calcular su valor, al que se llamará *CP*, partiendo de una frecuencia f y comparando el encadenamiento de doce quintas a partir de f con el encadenamiento de siete octavas:

$$CP=\frac{f\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{f\cdot 2^{7}}=1{,}013643265.$$

La diferencia es entonces de algo más de un 1% de una octava o, de modo equivalente, casi un cuarto de semitono. Esta diferencia se debe a que el cálculo de la fracción que define la quinta es incompatible con la octava, como se demuestra sin dificultad. Para ello, se puede estudiar si existen dos exponentes cualesquiera, x e y, que permitan «casar» las dos fracciones:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2^{y}\Rightarrow\quad \frac{3^{x}}{2^{x}}=2^{y}\Rightarrow\quad 3^{x}=2^{x}\cdot 2^{y}\Rightarrow\quad 3^{x}=2^{x+y}.$$

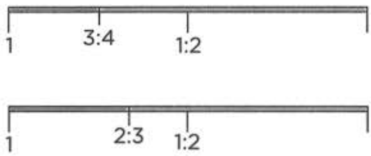
De la última expresión se deduce que sería lo mismo que hallar un número que fuera a la vez potencia de 2 y de 3. Sin embargo, y dado que tanto 2 como 3 son números primos, tal cosa entraría en contradicción con el teorema fundamental de la aritmética, según el cual todo entero positivo tiene una única representación como producto de números primos. Este teorema, postulado por Euclides, fue demostrado de forma completa por primera vez por el matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). De él se sigue que los intervalos de quintas y octavas definidos por los pitagóricos nunca se emparejarán, o lo que es lo mismo, que no es posible la existencia de una escala cromática sin coma pitagórica.

LOS NOMBRES DE LAS NOTAS

Los griegos nombraban las notas siguiendo las primeras letras del alfabeto jónico, asignando letras diferentes para un mismo sonido alterado en medio tono o doblemente ascendido. Por ejemplo, el

LAS TRES MEDIAS

Pitágoras no solo se aferraba ciegamente al misticismo de los números naturales, sino que también estaba muy marcado por sus descubrimientos sobre las medias aritmética, geométrica y armónica. Como puede apreciarse en la figura de la derecha. De este modo, 3:4 es la media aritmética de 1 y 1/2:

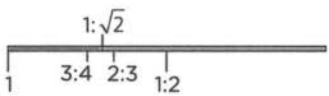


$$1-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2},$$

Mientras que 2:3 es la media armónica de 1 y 1/2:

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{1}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

Pitágoras comprobó de modo experimental que cuerdas con longitudes de razones 1:2, 2:3 (media armónica de 1 y 1/2) y 3:4 (media aritmética de 1 y 1/2) producían combinaciones de sonidos agradables, y a partir de ellas construyó la escala que se ha visto. A estos intervalos los llamó «diapasón», «diapente» y «diatesarón», que hoy conocemos como octava, quinta y cuarta. Pero, se observará la ausencia de la media geométrica en estos cálculos. Tal vez fue rechazada por que entrañaba un problema de orden superior, y muy grave, como se verá más adelante. El cálculo con la media geométrica pone en juego números inconmensurables y corresponde exactamente al *fa* sostenido de la escala cromática.

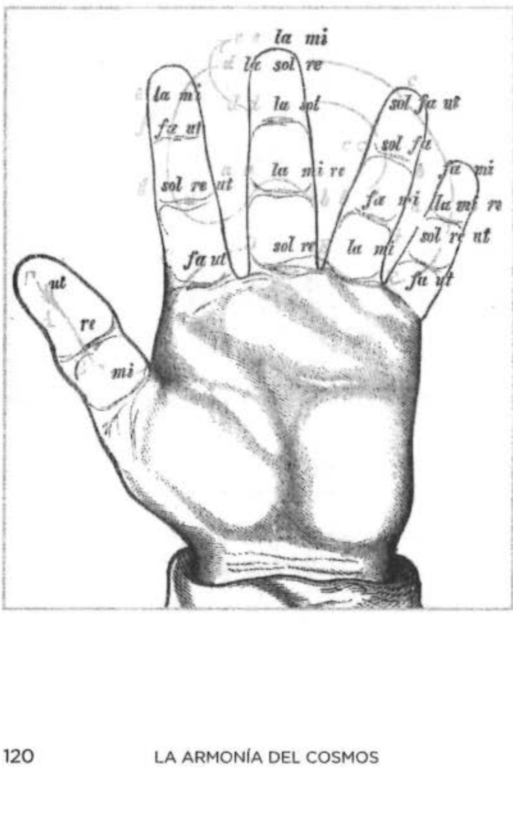




fa era α (alfa), el *fa* sostenido era β (beta), y el *fa* doblemente sostenido era γ (gamma). Para los griegos la escala se organizaba de manera descendente, al contrario de como se emplea en la actualidad.

También los romanos utilizaban las primeras letras del alfabeto para nombrar los sonidos de su escala. El filósofo romano Boecio (480-525 d.C.), autor de *Consolación de la filosofía*, que emprendió el propósito de unificar las escuelas filosóficas de Platón y Aristóteles, escribió un tratado sobre teoría de la música. En él, conocido por su título en latín, *De musica*, consideró una escala de quince notas que abarcaba dos octavas, y a cada una de ellas le asignó una letra distinta, ignorando el concepto cíclico de octavas.

El concepto cíclico volvería a recuperarse más tarde, designando con una misma letra las notas iguales de octavas distintas. Así, la denominada nomenclatura alemana o inglesa designaba las siete notas de la octava principal con letras de la A a la G, en mayúsculas; en la siguiente octava, de la «a» a la «g», en minúsculas, y la tercera, con dobles letras minúsculas (aa, bb, cc, dd, ee, ff, gg). De ese modo, siete de los doce sonidos, los correspondientes a las teclas blancas del piano, adquirieron nombres propios. Los otros cinco, relacionados con las teclas negras, fueron nombrados más tarde, tras la aparición del concepto de bemol, becuadro y sostenido. Sus nombres derivaron de los siete básicos.



Representación de una «mano guidoniana» dibujada a partir de las enseñanzas del monje benedictino.

En el siglo XI, el monje toscano Guido d'Arezzo (ca. 995-1050 d.C.) dedicó buena parte de sus estudios musicales a crear reglas mnemotécnicas para los intérpretes. Probablemente, la más conocida es la llamada «mano guidoniana», que ordenaba las notas en su notación alfabética asimilándola a un recorrido por la palma de la mano. Guido d'Arezzo rebautizó también las notas, asignando a cada sonido la primera sílaba de los versos de un himno a san Juan Bautista muy conocido en aquella época («Para que puedan cantar con toda su voz

tus milagros estos siervos tuyos, perdona los pecados de nuestros labios impuros, san Juan»), que en latín original es:

> ***Ut*** *queant laxis*
> ***Re****sonare fibris*
> ***Mi****ra gestorum*
> ***Fa****muli tuorum*
> ***Sol****ve polluti*
> ***La****bii reatum*
> *Sancte* ***I****ohannes.*

Finalmente, tras el cambio de *ut* por *do*, nacieron los nombres de las siete notas de la escala según aparecen en las lenguas romances, como, por ejemplo, el italiano, el francés o el español.

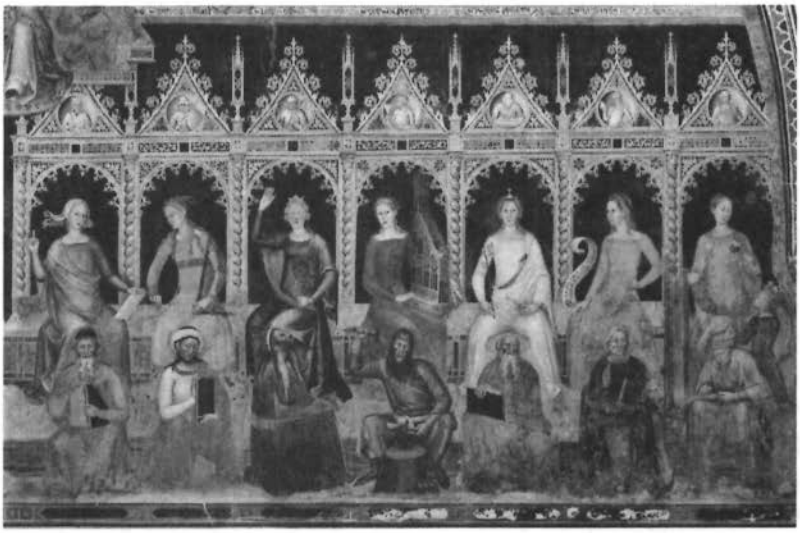
LA MÚSICA DE LAS ESFERAS

En su búsqueda de la armonía del universo, la escuela pitagórica diseñó modelos astronómicos, acústicos y musicales, y estudió música y aritmética en forma conjunta. Los pitagóricos redujeron los movimientos de los planetas a relaciones numéricas. Creían que los cuerpos, al moverse en el espacio, generaban vibraciones armónicas, la «música de las esferas». Se ha dicho que pudieron comenzar a considerar esa idea al escuchar el zumbido que produce un objeto sujeto al extremo de una cuerda cuando es cimbreado, como sucedía en algunos rituales religiosos.

Asimismo, los pitagóricos consideraban que un cuerpo que se moviera con mayor rapidez debía dar necesariamente una nota más alta que otro que se moviera con más lentitud. Por otro lado, según su astronomía, un planeta se movía más rápidamente cuanto más lejos de la Tierra se encontraba. Luego los sonidos que producirían los planetas —que el hombre no podía escuchar con el oído desnudo, pues estaba acostumbrado a ellos desde el mismo momento de su nacimiento— debían variar con su distancia a la Tierra, y todos estaban armonizados.

LAS SIETE ARTES LIBERALES

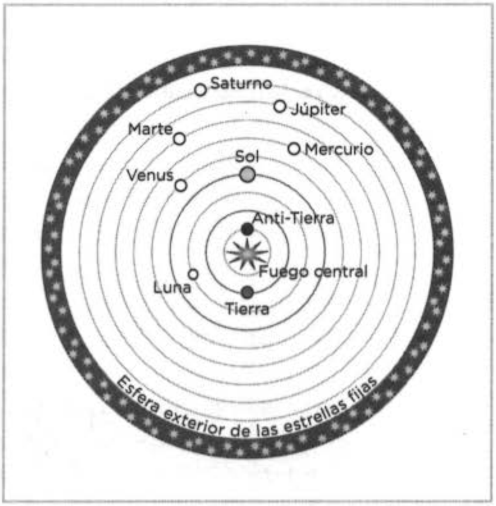
Las civilizaciones grecorromanas, en general, cultivaban el conocimiento teórico como un saber aparte de las actividades manuales. Las disciplinas superiores se distribuían en dos grandes grupos: el primero, denominado *trivium* («las tres vías»), estaba formado por la gramática, la dialéctica y la retórica; el segundo, llamado *quadrivium* («las cuatro vías»), estaba integrado por la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. El conjunto de ambas «vías» constituía los siete caminos que llevaban al hombre al equilibrio con el universo armónico: eran las «siete artes liberales».



Las siete artes liberales, según el fresco de Andrea de Bonaiuto realizado hacia 1365 para la Capilla de los Españoles de la basílica florentina de Santa María Novella. Cada arte toma la figura de una mujer y junto a ella se sitúa un pensador eminente, entre ellos Pitágoras, a los pies de la Aritmética (en primer lugar, a la izquierda).

Pitágoras y sus discípulos no buscaban solamente observar y describir los movimientos celestes, sino también encontrar alguna regularidad en ellos. La idea de un movimiento circular uniforme, aparentemente obvia en el caso de la Luna y el Sol, indicaba que

todos los movimientos planetarios tenían que ser explicables en términos de movimientos circulares uniformes. De acuerdo con esta manera de pensar, los últimos pitagóricos llegaron a una conclusión revolucionaria que suponía una verdadera ruptura con algunas de las creencias más antiguas del hombre: fueron los primeros en considerar que la Tierra tenía que ser una esfera. Tal vez esta pueda considerarse la intuición más brillante de la cosmología pitagórica, pero, como se verá a continuación, los pitagóricos también hacían trampas para encajar por la fuerza la realidad observable en su universo numérico.



Como el 10 era para ellos la expresión numérica de la perfección máxima, estaban convencidos de que había diez cuerpos en movimiento en el cielo. En el centro de lo que entonces se consideraba el universo, nuestro sistema solar, existía un fuego central alrededor del cual se movían los cuerpos celestes girando en órbitas circulares perfectas. La Tierra era la más cercana al fuego central. La Luna no giraba a su alrededor, sino que describía su propio círculo, como el Sol, que era el siguiente cuerpo. A continuación giraban los cinco planetas conocidos, y más allá las estrellas, engarzadas como joyas en una bóveda celestial (véase la figura).

Una simple suma revela que los cinco planetas, además de la Tierra, el Sol, la Luna y la esfera a la que estaban sujetas las estrellas, daban un total de nueve cuerpos móviles. Así que los pitagóricos inventaron un décimo cuerpo que también giraba alrededor del fuego central: la *Antichton*, cuya traducción literal es Anti-Tierra.

La idea de la Anti-Tierra solo tenía un problema: ningún astrónomo, ni siquiera los grandes sabios de Mesopotamia, había observado jamás ese objeto en el cielo. Pero tampoco ese detalle escapó a la penetración de los seguidores de Pitágoras. De hecho,

el mismo nombre con que bautizaron al hipotético planeta era una suerte de justificación. El décimo cuerpo no podía verse porque se movía exactamente a la misma velocidad que la Tierra en el lado opuesto del fuego central, y además, porque la parte habitada de la Tierra se encontraba de espaldas al fuego central.

Desafortunadamente, aunque los pitagóricos diseñaron la primera teoría que puso a la Tierra en movimiento, no fueron capaces de advertir la rotación de la esfera, sino que, bien al contrario, creían que era la esfera de estrellas fijas la que giraba alrededor del centro del universo. Como fuere, el pensamiento griego incorporó la mayoría de estas doctrinas, esencialmente el movimiento circular uniforme y la distinción entre cuerpos celestes y sublunares. Algunos expertos consideran que también pudo tener su origen en los pitagóricos la creencia en que los cuerpos celestes eran eternos, divinos, perfectos e inmutables y que los objetos sublunares, como la Tierra y, según los griegos, los cometas, estaban sujetos a cambios, decadencia y muerte.

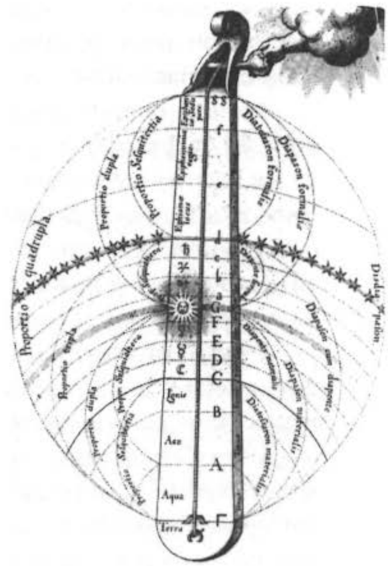
UN MODELO EN ETERNA CRISIS

Los pitagóricos mezclaron el pensamiento riguroso con doctrinas sorprendentemente acientíficas. Su fijación por los números dio como resultado una filosofía natural que al final no se correspondía con la naturaleza y tuvo consecuencias de todo tipo, algunas beneficiosas para el progreso del conocimiento, y otras, desastrosas.

A la lista de los aciertos que ya se han presentado hay que añadir una cuestión de conjunto. La aportación de los pitagóricos superó la limitación más importante de los jonios. Ambos afirmaban que el verdadero sentido de los datos estudiados debía ser un orden armonioso de la naturaleza, pero los jonios defendían la idea de la sustancia única como elemento esencial del universo. Los pitagóricos sustituyeron esa noción por la de la estructura formal de relaciones numéricas. De hecho, la ciencia moderna coincide con el énfasis de los pitagóricos sobre el número, aunque obviamente de una manera mucho más sofisticada.

EL MONOCORDIO CELESTIAL

La extrapolación cosmológica del misticismo numérico por mediación de la música era, y sigue siendo, una idea tan poderosa y poética que embriagó durante siglos a incontables pensadores y artistas. Fue uno de los aspectos de la cultura clásica que el humanismo se afanó en recuperar. En el Renacimiento algunas catedrales se diseñaron siguiendo proporciones musicales 2:1, 3:2 y 4:3. En 1623 el filósofo hermético Robert Fludd (1574-1637), seguidor del médico y alquimista Teofrasto Paracelso (1493-1591), publicó la obra *Anatomiae Amphiteatrum*, que contenía una ilustración que se haría célebre, mostrando la mano de Dios en el acto de afinar un monocordio celestial. La mano divina tensa la cuerda en una tabla alrededor de la cual las órbitas planetarias se superponen a los intervalos de la escala musical.



La célebre ilustración del monocordio celestial incluida en la obra *Anatomie Amphiteatrum*.

Ahora bien, el aspecto fanático de su pensamiento cerró a los pitagóricos a ideas más aptas para explicar los fenómenos naturales y subyugó las leyes de la naturaleza a los ideales de belleza, simetría y armonía. No cabe duda de que la creencia inflexible en la supremacía de los números frenó durante siglos el progreso que hubiese supuesto formular otro tipo de modelos más adecuados para describir la complejidad del mundo.

El ejemplo más claro de esta ceguera es la cosmología griega. Ya en el siglo III a.C. las órbitas circulares no encajaban con los datos observados. Entonces fueron reemplazadas por epiciclos, pequeños círculos que se movían alrededor de una órbita circular central. Con el tiempo, el número de epiciclos fue aumentando hasta

que el sistema estuvo tan sobrecargado que resultaba ridículo y, por supuesto, completamente inútil. La posibilidad de que los cuerpos celestes siguieran cualquier otra órbita que no fuera circular era inaceptable para los griegos: tenía que ser un círculo, la más perfecta de todas las formas.

Incluso cuando Nicolás Copérnico (1473-1543), en su gran obra *De revolutionibus orbius celestium* (*Sobre el movimiento de las esferas celestiales*, publicada en el año de su muerte), destronó a la Tierra de su posición en el centro del universo y la reemplazó por el Sol, aún se mantuvo fiel a aquellas viejas órbitas circulares. No fue hasta 1609 cuando Johannes Kepler (1571-1630) las reemplazó por elipses.

Pero el revolucionario Kepler no supo escapar del todo al influjo poético de un cosmos en equilibrio musical. Aunque fue una figura clave en la revolución científica, el gran astrónomo y matemático alemán también era un místico. Invirtió treinta años de su vida en demostrar que el movimiento de los planetas cumplía las leyes pitagóricas de la armonía. En busca del principio fundamental que explicara el porqué de las excentricidades orbitales de los planetas, Kepler midió, para cada uno de ellos, la velocidad máxima en el perihelio (el punto más cercano al Sol) y la velocidad mínima en el afelio (el punto más alejado). Para deleite del astrónomo, los cocientes entre una velocidad y otra se correspondían con intervalos armónicos, por lo que representó los cocientes en forma de notación musical, un rendido homenaje a la melodía de las esferas pitagórica. Kepler expuso su teoría en la obra *Harmonice mundi (La armonía de los mundos)*, publicada en 1619. En sus páginas llegó a plantear escalas y acordes asociados a cada planeta. En momentos muy poco frecuentes, según el autor, todos los planetas podrían tocar juntos en perfecta concordancia, lo que pudo haber ocurrido una única vez en la historia, quizá en el momento de la creación.

CAPÍTULO 6

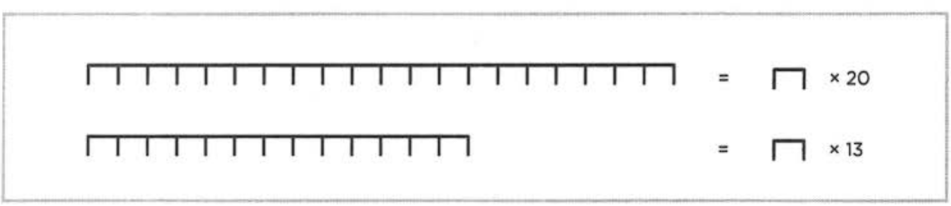
El fracaso de la aritmética universal

El perfecto cosmos musical de los pitagóricos, basado en el sagrado número, tenía un grave problema: para que todo encajara, el número debía ser necesariamente entero. Aunque las fracciones ya existían, la aritmética griega las rechazaba. Pero el propio teorema del maestro contenía el germen de la destrucción, y desvelarlo solo requería realizar un cálculo pequeño pero fatal. La aparición de los números inconmensurables hundió el paraíso pitagórico de la aritmética universal.

Afirmar que los pitagóricos no tenían noción alguna de lo que actualmente conocemos como fracciones es una imprecisión. Los seguidores del sabio de Samos manejaban un concepto equivalente: las relaciones entre números enteros, que les permitieron, por ejemplo, explicar sus descubrimientos sobre la armonía de los sonidos de dos cuerdas comparando sus longitudes relativas: 2:1, 3:2, 4:3... De hecho, las fracciones eran conocidas desde los avances realizados en Mesopotamia, siendo utilizadas en la vida cotidiana; se empleaban en el comercio para expresar partes de la unidad monetaria, por ejemplo. Ahora bien, las matemáticas, en tiempos de los pitagóricos, las consideraban algo imperfecto e innecesario con lo que no había que perder tiempo.

La creencia tal vez más firme de los seguidores de Pitágoras, el pilar de su universo aritmético en armonía, era que dos medidas cualesquiera siempre eran conmensurables, es decir, podían ser comparadas apelando a dos números enteros. El concepto de conmensurabilidad está relacionado con lo que hoy llamamos núme-

Puede establecerse con precisión cuántas veces mayor (o menor) son dos medidas *A* y *B* una con respecto a la otra apelando solo a dos números enteros. En el gráfico, la línea de arriba es X veces mayor que la de abajo, y la de abajo 13/20 veces menor que la de arriba.



ros racionales. Un número racional es lo que comúnmente se conoce como fracción: la división o relación o razón entre dos números enteros (siendo el segundo no nulo). La conmensurabilidad pitagórica podría definirse como la ley por la cual puede establecerse con precisión, cuántas veces mayor (o menor) son dos medidas A y B una con respecto a la otra. En términos matemáticos actuales, se diría que dos medidas cualesquiera A y B son

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS

Las matemáticas actuales definen el número como un elemento de un conjunto que debe verificar ciertas propiedades. Así es como se han definido los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, que se construyen por etapas sucesivas a partir del conjunto $\mathbb{N}$ de enteros naturales.

- $\mathbb{C}$ Complejos
  - $\mathbb{R}$ Reales
    - $\mathbb{Q}$ Racionales
      - $\mathbb{Z}$ Enteros
        - $\mathbb{N}$ Naturales
          - Primos
          - Compuestos
        - 0 Cero
        - Enteros negativos
      - Fraccionarios
    - Irracionales
  - Imaginarios

— Complejos ($\mathbb{C}$): suma de un número real y un número imaginario.

— Reales ($\mathbb{R}$): conjunto de los racionales y los irracionales.

- Racionales ($\mathbb{Q}$): los números que pueden representarse como el cociente de dos enteros (en concreto, un entero y un natural positivo), es decir, una fracción común m/n, con numerador m y denominador n distinto de cero. El término «racional» alude a que es la parte de un todo.
- Irracionales: los números que no pueden ser expresados como una fracción m/n, donde m y n son enteros, con n diferente de cero, y donde esta fracción es irreducible, como 3,14159... (π), 2,7182... (e), 1,6180... (Φ) o 1,4142135... ($\sqrt{2}$, que se verá con más detalle a continuación). Irracional es cualquier número real que no es racional.

— Imaginarios: números complejos cuya parte real es igual a cero, por ejemplo $5i$ (nótese que $i = \sqrt{2} - 1$). En otras palabras, un número de la forma $z = x + iy$, donde $x = 0$.

conmensurables si existe una tercera medida C y dos números enteros p y q tales que C cabe p veces en A y q veces en B.

Pero este mundo encajado a la perfección no podía aguantar los embates de la realidad. Paradójicamente, un sencillo cálculo con el propio teorema del maestro podía reducir a escombros toda la construcción. Siendo los pitagóricos matemáticos tan capaces, era cuestión de tiempo que alguno de ellos realizara el cálculo fatal.

Dentro de los racionales se distinguen:

- Enteros ($\mathbb{Z}$): conjunto de números que incluye a los naturales distintos de cero, los negativos y el cero.
- Naturales ($\mathbb{N}$): cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que usó el ser humano para la enumeración de manera natural. Son el 1, 2, 3, 4...
- Cero: el signo numérico de valor nulo, que en notación posicional ocupa los lugares donde no hay una cifra significativa.
- Enteros negativos: números reales inferiores a cero. El opuesto de un negativo es un número positivo y al revés. El único número positivo y negativo a la vez es el cero.
- Fraccionarios: números que expresan una cantidad dividida entre otra, es decir que representan un cociente no efectuado de números.

Dentro de los naturales se distinguen:

- Primos: todo número natural mayor que 1 que tiene tan solo dos divisores distintos, él mismo y el 1. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... El 2 es el único primo par.
- Compuestos: todo número natural no primo, excepto el 1 y el 0, que tiene uno o más divisores distintos a 1 y a sí mismo. También se usa el término «divisible» para referirse a ellos. Por ejemplo, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18...

UN MUNDO (CASI) PERFECTO

En general se acepta como una certeza histórica que el descubrimiento en términos científicos de la existencia de segmentos mutuamente no comparables, es decir inconmensurables, tuvo lugar en el seno de la escuela pitagórica, no más tarde del año 420 a.C. Como los pitagóricos se habían dedicado a estudiar las ternas de números enteros que podían ser lados de un triángulo rectángulo, se ha tendido a considerar que debieron descubrir estas nuevas razones en el mismo contexto, aunque algunos estudios señalan otras posibilidades, como veremos más adelante.

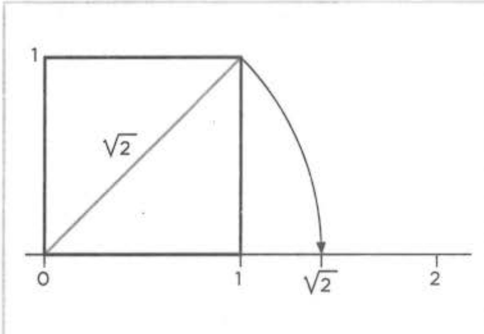
Por lo común, la investigación histórica en matemáticas sigue a la tradición al atribuir el desconcertante descubrimiento de los irracionales al pitagórico Hipaso de Metaponto. Como castigo por

HIPASO DE METAPONTO



El matemático y filósofo Hipaso nació en torno al año 500 a.C. en la ciudad de Metaponto, situada en el golfo de Tarento, en el sur de la península italiana. La fecha de su muerte es desconocida, lo que quizá haya contribuido a las leyendas sobre su muerte. Además de la inconmensurabilidad, se le atribuyen otros dos importantes descubrimientos: la construcción de un dodecaedro como aproximación a una esfera y la determinación de las relaciones numéricas de las consonancias básicas a través de experimentos de sonido. Se tiene constancia de que realizó exhaustivos estudios sobre acústica y resonancia, por lo que se le considera un teórico de la música. La leyenda no solo asegura que probó la existencia de los números irracionales, sino que rompió la regla pitagórica de silencio al revelarlos al mundo. Los documentos de la época dan versiones distintas de su final y no es posible tomar ninguna como cierta.

haber introducido en el universo el elemento que negaba el principio inamovible de la secta —que todos los fenómenos del universo se podían reducir a números enteros y sus razones—, se cuenta que algunos miembros de la hermandad lo lanzaron por la borda de un barco.



Plasmación gráfica de la demostración de Hipaso de Metaponto. El matemático de la Magna Grecia calculó la diagonal del cuadrado, hasta entonces desconocida, utilizando el teorema de Pitágoras.

La realidad es que ni siquiera se sabe a ciencia cierta en relación con qué tema de las matemáticas surgieron los irracionales. La tradición continúa su relato asegurando que Hipaso estudiaba el cuadrado. A pesar de ser una figura muy simple, los pitagóricos no conocían de nadie que hubiera calculado su diagonal. Hipaso lo hizo empleando el teorema del maestro.

En busca de una demostración universal, el matemático probó a calcular considerando que el lado medía solo 1. Era una operación simple: se trataba de descomponer el cuadrado en dos triángulos y aplicar el teorema del maestro para calcular la hipotenusa (véase la figura). En un triángulo rectángulo isósceles, el cuadrado de la hipotenusa es el doble del cuadrado de cada cateto. Si los catetos miden 1 metro, ¿qué longitud tendrá la hipotenusa? El resultado de este planteamiento inocente no era ni un número entero ni una fracción..., no era conmensurable. En la terminología matemática actual se expresaría diciendo que un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, tiene una hipotenusa que mide $\sqrt{2}$ y es irracional. En tiempos de Hipaso significaba el hundimiento absoluto de los principios más básicos del pitagorismo.

Pero este resultado no solo demostró que la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles no es conmensurable con los catetos, sino que también planteó un problema central en las matemáticas griegas.

Los pitagóricos habían establecido una identificación absoluta entre número y geometría, pero la existencia de razones inconmensurables también hacía saltar por los aires esa relación.

No por ello dejaron de considerar toda suerte de longitudes, áreas y razones en geometría, pero ciertamente se ciñeron de modo estricto a considerar razones numéricas solo para los casos conmensurables. A causa de ello, con el tiempo las magnitudes geométricas se distanciaron de las cantidades numéricas, que comenzaron a trabajarse por separado. La aparición de la inconmensurabilidad convenció a los matemáticos griegos de que la geometría debía establecerse de manera independiente de la aritmética; se rompía así la tradición pitagórica que no hacía distinciones entre ambas ramas del saber. En los diálogos de Platón parece probarse que la consideración por separado de la geometría era corriente en su época.

¿Cómo tardaron tanto en percatarse los penetrantes pitagóricos de la existencia del punto de fractura por el que podía estallar su sistema? ¿Qué hubieran esperado encontrar en la diagonal del cuadrado? De acuerdo con el teorema de Pitágoras, en un cuadrado de lado 1, el cuadrado sobre la diagonal debería tener área 2 y, por tanto, la longitud d de esta diagonal debería ser un número que, al elevarse al cuadrado, diese 2 (es decir, $d^2=2$). Sin embargo, en este punto vuelve a aparecer la $\sqrt{2}$.

La $\sqrt{2}$ era una longitud de un segmento que se podía esbozar con facilidad a partir de un cuadrado con la ayuda de una regla y un compás. Así que, ¿no era razonable pensar que si se fijaba una unidad cualquiera «u» (menor que 1), se pudiese medir a la vez el lado (1) y la diagonal ($\sqrt{2}$) del cuadrado? ¿No era razonable creer que el lado y la diagonal de un cuadrado tenían que ser necesariamente conmensurables? Pues bien, aunque pensar de ese modo era lo más lógico, el hecho invariable es que el lado y la diagonal de un cuadrado no son conmensurables.

Este planteamiento del problema condujo a la necesidad de que, repitiendo la unidad común u con un número entero n de repeticiones, se midiese el lado $1=nu$, y con otro número entero m de repeticiones, se hallase $\sqrt{2}=mu$. Es decir, lo que dividiendo debería ser:

$$\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{mu}{nu}=\frac{m}{n}.$$

Así, la conmensurabilidad se reduciría a que $\sqrt{2}$ fuese una fracción m/n de enteros positivos.

Más allá del camino que emprendieran para acabar llegando al sorprendente resultado, lo cierto es que los pitagóricos se toparon con la desagradable evidencia de que había números no expresables como relación de números enteros. Y esa certeza era incompatible con su idea de una aritmética universal. Los seguidores del maestro llamaron «razones conmensurables» a las que se podían expresar por medio de números enteros, lo que significaba que las dos cantidades venían medidas por una unidad común, y a las otras las llamaron «razones inconmensurables». Así, lo que las matemáticas actuales expresan como

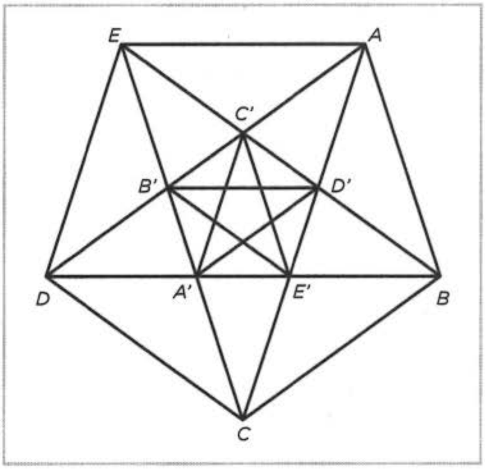
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

es una razón inconmensurable.

EL PENTAGRAMA DE HIPASO

La bien estructurada historia de Hipaso, con final dramático incluido, combina elementos que envidiaría cualquier novelista: la cándida sencillez del cuadrado, que alumbraba en su seno la semilla de la destrucción, y el insensato hermano de la comunidad que abrió la caja de los truenos. No existen evidencias de estos hechos ni se tiene la certeza absoluta de que Hipaso descubriera la inconmensurabilidad en el cuadrado. De hecho, una leyenda alternativa le otorga una demostración diferente de la irracionalidad. La historia le presenta describiendo en público la esfera compuesta de doce pentágonos. Ciertamente, el pentágono regular es una figura matemática en la que resultaba relativamente sencillo demostrar la inconmensurabilidad, sobre todo utilizando el antiguo método de cambio de camino.

El método conocido como «el cambio de camino» desempeñó un papel central en la matemática griega. Con él se determinaba, por ejemplo, la mayor medida común, es decir, el máximo



Demostración de la existencia de segmentos inconmensurables en el pentagrama.

común divisor, de dos números. El método consiste en lo siguiente: dadas dos magnitudes diferentes (a,b) con $a<b$ se resta la menor a la mayor; de entre la nueva magnitud obtenida $b-a$ y a, se vuelve a restar la menor a la mayor, y así, sucesivamente. Este procedimiento no es aplicable a la pareja de magnitudes (a,b) si las magnitudes son inconmensurables.Cuando a y b son números naturales, puede definirse el máximo común divisor de ambos, denominado comúnmente como $\text{mcd}(a,b)$, y el procedimiento, llamado algoritmo de Euclides, es siempre finito y proporciona infaliblemente un resultado. Si el proceso no es finito, es que no hay máximo común divisor posible, y a y b no son conmensurables. El teorema —que no reproduciremos— lo demostró Euclides en el Libro X de los Elementos: «Cuando, dadas dos magnitudes distintas, al quitar alternativamente la más pequeña a la mayor, el resto nunca coincide con la magnitud precedente, entonces dichas magnitudes han de ser inconmensurables».

Como se ve en la figura, las diagonales de un pentágono regular forman de nuevo un pentágono regular, y así sucesivamente. Para la cadena de pentágonos obtenidos en este proceso se tienen las relaciones $AE=AB'$ y $B'D=B'E'$, de donde $AD-AE=B'E'$ y, de manera análoga $AE=ED'=EA'$ y $B'E'=B'D=B'E$; por consiguiente, $AE-B'E'=B'A'$, y así sucesivamente, sin llegar a finalizar nunca. Expresado en términos verbales, de ello se deducen tres conclusiones:

— La diferencia entre las diagonales y los lados del pentágono mayor es igual a las diagonales del pentágono menor.

— La diferencia entre los lados del pentágono mayor y las diagonales del pentágono menor es igual a los lados del pentágono menor.

— La diferencia entre las diagonales del pentágono menor y sus lados respectivos es de nuevo igual a las diagonales del siguiente pentágono menor, y así de manera indefinida.

El proceso de cambio de camino se puede continuar y, por ello, no es posible encontrar una medida común máxima para las diagonales y los lados del pentágono regular: existen segmentos mutuamente inconmensurables.

Algunos estudios indican que la demostración de que el lado y la diagonal de un cuadrado son inconmensurables podría pertenecer a una época posterior a los pitagóricos, puesto que resulta más sofisticada que si se lleva a cabo un procedimiento como el del cambio de camino. El cuadrado con las diagonales habría servido tan solo a posteriori como medio de constatar una situación ya observada en otros ámbitos, como el pentagrama.

INCONMENSURABLE EUCLIDES

En el Libro X de los *Elementos* Euclides emprendió la tarea de clasificar los irracionales en tipos. Hay 115 proposiciones en este libro, aunque las ediciones más antiguas añaden las proposiciones 116 y 117. La última de ellas ofrece una demostración de la irracionalidad a partir de la teoría de pares e impares, empleando el teorema de Pitágoras, con el mismo desarrollo que, salvo diferencias de lenguaje, se explica hoy en muchos libros de texto.

Tal y como lo presenta Euclides, por el teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo isósceles el cuadrado de la hipotenusa es el doble del cuadrado de cada cateto. Si cada cateto mide 1, ¿qué longitud tendrá la hipotenusa?

Supóngase que su longitud es m/n metros, entonces

$$\frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Si m y n tienen un factor común, hágase la división, y entonces m o n deben ser impares. Ahora es $m^2 = 2n^2$, por lo tanto m^2 es

par, m es par también, y entonces n es impar. Supóngase que $m=2p$. Entonces $4p^2=2n^2$; por consiguiente $n^2=2p^2$, y por lo tanto, n es par. En consecuencia, ninguna fracción de m/n medirá la hipotenusa.

Este argumento demuestra que, sea la que sea la unidad de longitud que se adopte, hay longitudes que no guardan relación numérica exacta con la unidad, en el sentido de que no hay dos enteros m, n tales que m veces la longitud en cuestión sea n veces la unidad. El procedimiento de Euclides se emplea actualmente para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$, pero hoy se cree que no aparecía en el texto original, sino que fue un añadido posterior. Las ediciones modernas suelen omitirlo, dando punto final al Libro X con la proposición 115.

Como se ha dicho, la aparición de los irracionales subrayó la independencia de la geometría respecto a la aritmética. En el Libro II de sus *Elementos*, Euclides demostró geométricamente muchas cosas que en la actualidad se demostrarían por álgebra, por ejemplo, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. La dificultad de los inconmensurables le obligó a emplear este método, y mientras no existió una teoría aritmética adecuada para los inconmensurables, el método de Euclides fue el mejor posible en geometría.

LA RAÍZ DE DOS

El número $\sqrt{2}$ fue el primer irracional que se descubrió, un suceso científico de la máxima importancia que marcó durante siglos el desafío matemático de construir los números reales. A pesar de lo que parece sugerir la enigmática y trepidante historia de Hipaso y el derrumbamiento del cosmos pitagórico, encontrar la $\sqrt{2}$ no es difícil; lo difícil es saber tratarla. Para hallarla basta con trazar un cuadrado en un papel, como el que se muestra en la figura 1.

El cuadrado principal debe dividirse en cuatro cuadrados de lado 1, y luego marcar sus cuatro diagonales. De este modo se obtiene un cuadrado interior de área 2 que ocupa la mitad del cuadrado de lado 2. El lado de este cuadrado interior multipli-

cado por sí mismo debe valer 2. Así, ya se ha obtenido la raíz cuadrada de 2, o, según la notación moderna, $\sqrt{2}$.

Después de trazar esta figura sobre el papel no es posible observar la tablilla mesopotámica que se conserva en la prestigiosa Universidad de Yale, numerada como YBC 7289, sin sentir un estremecimiento de asombro.

La pieza está datada entre los años 1800 y 1600 a.C. y muestra el cuadrado con dos diagonales que permite localizar con sencillez la $\sqrt{2}$. El dibujo está acompañado de una serie de números marcados con punzones con la notación de Babilonia, de base 60. Los investigadores aseguran que esos datos numéricos corresponden a una aproximación de $\sqrt{2}$ con sus primeros decimales:

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1{,}41421296.$$

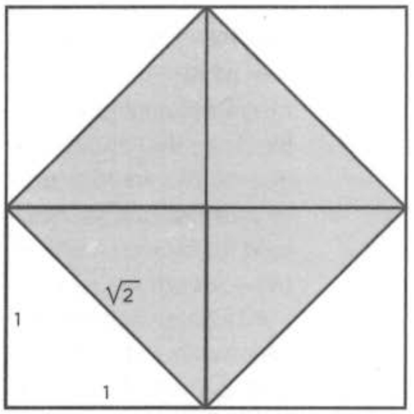


FIG. 1



Los investigadores han podido identificar, como se observa en la fotografía, las incisiones cuneiformes que presenta la tablilla YBC 7289, conservada en la Universidad de Yale.

En el libro hindú de los *Sulvasutra*, de tiempo muy posterior, entre los años 800 y 500 a.C., aparece también la observación de que el lado del cuadrado de lado 1 y su diagonal no pueden ser conmensurables. Los historiadores de las matemáticas interpretan las siguientes palabras contenidas en el libro como una aproximación de $\sqrt{2}$: «...se aumenta la longitud del lado por un tercio y este tercio por su cuarta parte y se resta la parte treinta y cuatroava de este cuarto». La expresión numérica de esta formulación es la siguiente:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} = 1{,}414215686.$$

Ahora bien, por espectaculares que puedan parecer estas manifestaciones, los babilonios, los indios y, por supuesto, también los egipcios, daban a las fracciones un uso meramente práctico, que no fue trascendido, como se ha dicho, hasta el desarrollo de la matemática griega. Los babilonios no podían saber que sus aproximaciones sexagesimales fraccionarias jamás serían exactas, así como tampoco los egipcios llegaron a reconocer el carácter de los irracionales. A su pesar, el mérito de los pitagóricos fue reconocer que las razones inconmensurables son de un tipo completamente distinto que las conmensurables. La teoría de proporciones para razones inconmensurables y para todo tipo de magnitudes se debe al posterior Eudoxo de Cnidos (390-337 a.C.), filósofo, matemático, astrónomo y médico, que fue discípulo de Platón (ca. 427-347 a.C.).

DEFECTOS DE LAS MATEMÁTICAS GRIEGAS

Los increíbles logros de la civilización griega clásica siguen siendo motivo de maravilla aún hoy día. Pero a pesar de ello, sus matemáticas no fueron capaces de superar algunos destacados defectos que legarían a las generaciones futuras problemas por resolver de importancia considerable. Al final, aquello que en principio había sido su principal virtud, la insistencia de los griegos en la exactitud de los conceptos y las definiciones, acabó suponiendo un lastre gravísimo para el desarrollo sereno de matemáticas creativas.

El defecto fundamental de las matemáticas griegas fue, obviamente, su incapacidad para admitir el concepto de número irracional. Con ello se vio retrasado el desarrollo de la aritmética y el álgebra, y se causaron dificultades aún mayores, pues los griegos redujeron sus matemáticas a la geometría, ya que el pensamiento geométrico evitaba una presentación explícita de lo irracional



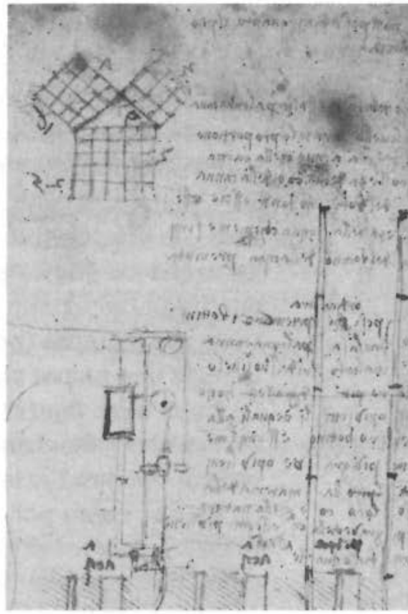




FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
La aritmética personificada en Boecio y Pitágoras, grabado de la *Margarita philosophica*, obra de Gregor Reisch (1503).

FOTO SUPERIOR DERECHA:
El teorema de Pitágoras recogido en el *Codex atlanticus* de Leonardo da Vinci (Biblioteca Ambrosiana, Milán).

FOTO INFERIOR:
Detalle del relieve gótico de la catedral de Chartres dedicado a las artes liberales; la figura de la izquierda es Pitágoras.

como un número. No dejaron de trabajar con todo tipo de longitudes, áreas y razones en geometría, pero solo consideraron válidos los casos conmensurables. Así se forzó también la distinción entre número y magnitud, que mantendría al álgebra y la geometría como disciplinas sin relación mutua durante siglos.

Además, la geometría griega ya tenía considerables limitaciones. Los griegos solo admitían como válidos aquellos conceptos geométricos que se pudieran construir en la realidad, es decir, que pudieran existir, y que pudieran dibujarse usando solo una regla y un compás (por si esto fuera poco, no se admitía el uso de la regla con marca alguna sobre ella). Por tanto, la geometría se limitaba a las figuras que se podían obtener a partir de la línea recta y el círculo. Las únicas superficies admitidas eran las que se podían obtener haciendo girar líneas rectas y círculos alrededor de un eje, como por ejemplo el cilindro, el cono y la esfera, formados por la revolución de un rectángulo, un triángulo y un círculo, respectivamente, alrededor de una recta; así como el prisma, que es un cilindro especial, y la pirámide, que resulta de la descomposición de un prisma. Las secciones cónicas se introdujeron al cortar conos mediante un plano.

Todas estas restricciones a figuras claramente definidas dieron lugar a una geometría simple, ordenada, armoniosa y bella, pero demasiado rígida. En su insistencia en la unidad, la completitud y la sencillez, y en separar el pensamiento especulativo de la utilidad, la geometría clásica griega restringió la visión de sus matemáticos, les cerró la mente a nuevos pensamientos y métodos, y puso un límite infranqueable a sus logros.

El fracaso a la hora de aceptar los irracionales como números dejó abierta la cuestión de si se podía asignar un número a razones inconmensurables, con lo que estas podrían estudiarse desde la aritmética. Con el número irracional, el álgebra se hubiera ampliado también. En lugar de regresar a la geometría para resolver ecuaciones cuadráticas, o de otro tipo, que podían tener raíces irracionales, estos problemas se hubieran podido abordar en términos numéricos, y el álgebra se hubiera desarrollado a partir de la situación en que la dejaron los egipcios y los babilonios. Incluso para los números enteros y las razones de números enteros, los

EL INFINITO GRIEGO

Otra peculiar limitación de los griegos fue que nunca consiguieron comprender lo infinitamente grande, lo infinitamente pequeño y los procesos infinitos. Los pitagóricos asociaban lo bueno y lo malo con lo limitado y lo ilimitado respectivamente. Para evitar cualquier afirmación acerca de la infinitud de la línea recta, Euclides decía en sus *Elementos* que un segmento lineal puede prolongarse todo lo que sea necesario. La relación entre punto y recta abrumaba tanto a los griegos que Aristóteles insistió en separar ambos conceptos. Por un lado, admitía que los puntos estaban sobre rectas, pero por otro decía que una recta no podía estar formada de puntos, porque lo «continuo» no puede construirse a partir de lo «discreto».

griegos no tenían ninguna base lógica; la sustituyeron por algunas vagas definiciones de Euclides. La necesidad de un fundamento lógico del sistema de números se volvió crítica cuando los alejandrinos comenzaron a usar libremente los números, incluidos los irracionales, siguiendo en este punto la tradición empírica de egipcios y babilonios.

Así, los griegos legaron a la humanidad dos ramas de las matemáticas distintas y desarrolladas de modo desigual: una geometría rigurosa, deductiva y sistemática, y una aritmética poco formalizada y empírica, con su extensión al álgebra. La carencia de un álgebra deductiva hizo que hablar de rigor matemático significara hablar de geometría hasta los siglos XVII y XVIII, cuando el álgebra y el cálculo ya se habían desarrollado.

Finalmente, la restricción de la geometría euclídea a conceptos que se pudieran construir con regla y compás dejó dos grandes tareas a las matemáticas. La primera de ellas era la resolución de tres problemas que ejercerían una gran fascinación durante siglos y que incluso hoy en día llaman la atención, aunque se resolvieron en el siglo XIX: probar la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo con la regla y el compás. La segundo tarea consistía en ampliar los criterios para la existencia de un concepto geométrico. Que la única manera de probar la exis-

tencia de un concepto geométrico fuera la posibilidad de ser construido era una condición demasiado restrictiva. Además, como algunas longitudes no se pueden construir, la recta euclídea es incompleta; es decir, no contiene las longitudes que no se pueden construir. Para ser completas y verdaderamente útiles en el estudio del mundo físico, las matemáticas debían liberarse de esta limitación técnica.

CAPÍTULO 7

Pitagóricos y neopitagóricos

En las doctrinas que hoy se conocen como «pitagóricas» es imposible diferenciar un núcleo de enseñanzas que pueda atribuirse exclusivamente a Pitágoras de Samos de las ideas que se fueron divulgando por escrito un siglo después de su muerte. El conocimiento matemático de los pitagóricos acerca de la armonía y el número ha llegado hasta la actualidad de la mano de Filolao de Crotona y Arquitas de Tarento.

La mayoría de los autores antiguos afirmaron que, tras la muerte del maestro, la escuela de pensamiento de Pitágoras se escindió en facciones, aunque no siempre coinciden en su número exacto ni en su nombre. La división más célebre establecía dos grupos: los «pitagóricos» y los «pitagoristas», considerando los primeros como místicos y los segundos como matemáticos, quizá un eco de la diferencia entre acusmáticos y matemáticos. Pero hasta el momento ha sido difícil encontrar evidencias que avalen o desacrediten esta división.

En general se considera que los llamados «pitagóricos» fueron los primeros partidarios de Pitágoras, y por ello son conocidos como los «viejos» o «antiguos pitagóricos». Sus dos figuras más destacadas fueron Filolao de Crotona y Arquitas de Tarento.

Uno de los pocos autores de los que la historia de la ciencia se vale para reconstruir el pitagorismo primitivo es Aristóteles. El estagirita dedica el capítulo quinto del Libro I de su *Metafísica* a criticar y exponer las doctrinas de «los llamados pitagóricos», según sus palabras. Pero algunos estudiosos actuales consideran que el filósofo se refiere a personajes muy posteriores, cuyo pensamiento no se puede identificar con Pitágoras y la primera generación de pitagóricos. Otros investigadores van más allá afirmando que las diferencias entre Pitágoras y sus seguidores fueron máximas, pues aquel solo se ocupó del aspecto religioso mientras que

la investigación matemática fue el centro de interés de sus pupilos. En cualquier caso, resulta difícil establecer una distinción tajante entre los primeros pitagóricos y los posteriores. Además, el pitagorismo no se restringe a las doctrinas de los pitagóricos estrictos; incluye también las influencias ejercidas por ellos, sobre todo en Platón.

Como Pitágoras no escribió ningún libro, es difícil discernir hasta qué punto los escritos atribuidos a la tradición pitagórica reflejan la visión del fundador. Parece que al principio los pitagóricos se esforzaron en mantener el secreto y la pureza de sus enseñanzas, pero las generaciones siguientes fueron divulgando sus conocimientos. Los testimonios sobre pitagóricos «auténticos» y «falsos» y las acusaciones de traición sugieren que hubo un conflicto interno en el pitagorismo antiguo y en la transmisión de su legado tras la disolución de la secta.

¿De qué círculos pitagóricos procedió la tradición que consagraría al maestro Pitágoras como fundador de las matemáticas y de la cosmología numérica? Por lo que es posible saber, la idea de la aritmética universal se fue asentando, e incluso poniendo por escrito, en el pitagorismo posterior al maestro por lo menos en un siglo, cuando la antigua escuela religiosa se mezcló con la tradición metodológica y especulativa de la filosofía jónica. A partir de Platón se fue imponiendo una percepción del pitagorismo como escuela de matemáticas y astronomía. La cuestión del número se afianzó con Aristóteles, que dio por cierto que los «llamados pitagóricos» creían que los números eran los principios materiales de las cosas.

FILOLAO DE CROTONA

Filolao de Crotona (470-385 a.C.) fue posterior a Pitágoras en un siglo y emprendió la tarea de recoger y ordenar las doctrinas pitagóricas, comenzando por la cosmología. En la primera mitad del siglo v a.C. estableció la teoría acerca del cosmos, que giraría sobre un gran fuego central. Fijó la física pitagórica en general y

EL PROBLEMA DE LAS FUENTES



Manuscrito perteneciente al *Tratado del cielo* de Aristóteles en la edición latina realizada en 1502 en Holanda.

Paradójicamente, las fuentes de las que procede el conocimiento actual sobre matemáticas griegas son menos directas y fiables que las que se dispone sobre Egipto y Mesopotamia, aunque estas son mucho más antiguas. No ha llegado hasta la actualidad ningún manuscrito original de los matemáticos griegos importantes. Una posible explicación se encuentra en la fragilidad de los soportes, pero sobre todo se debe responsabilizar a las destrucciones que sufrieron las grandes bibliotecas de los antiguos griegos. La fuente principal de las obras matemáticas griegas son, en primer lugar, los códices bizantinos manuscritos en griego, posteriores a las obras originales entre 500 y 1500 años, y, después, las traducciones al árabe y las versiones latinas de esas traducciones. El problema de estas obras es que no son reproducciones literales, sino ediciones críticas, y es difícil aislar las aportaciones de los editores o incluso tener la seguridad de que se entendieron correctamente los originales. Para completar el cuadro de las matemáticas griegas clásicas, los estudiosos cuentan también con las fuentes no estrictamente matemáticas pero sí próximas, que han resultado ser de un enorme valor. Los filósofos griegos, especialmente Platón y Aristóteles, tenían mucho que decir sobre matemáticas, y sus escritos han sobrevivido. De una u otra forma, disponemos de las obras de Euclides, de Arquímedes, y de otros matemáticos griegos, aunque la reconstrucción de sus obras ha sido una tarea formidable que todavía presenta lagunas y cuestiones en debate.

defendió la imagen de Pitágoras y su secta como maestros del número, la música y la armonía astronómica. La armonía era un principio de equilibrio cósmico mencionado antes por algunos preso-

cráticos, lo que sugiere la pregunta sobre si el sistema de Filolao fue una reconstrucción estricta de las enseñanzas de Pitágoras o el refundido de aquellas con ideas posteriores.

¿Quién fue Filolao de Crotona? Quizá un superviviente del hundimiento de la escuela en aquella ciudad, que huyó a Grecia. Platón lo presentó en Tebas con el oficio de maestro hacia el año 399 a.C. y situó su muerte de vuelta a Crotona. Si las fechas son correctas, fue contemporáneo de Sócrates y pudo conocer a Platón en Italia. Platón afirmó que Filolao había sido el primero en publicar doctrinas pitagóricas y que él disponía de ejemplares de sus obras. Existen varios textos de su supuesta autoría que se dan por auténticos y lo cierto es que sus doctrinas dejaron una huella profunda en su época.

Filolao sostenía que toda materia está compuesta por números en dos formas: números limitantes y números ilimitados. A ellos se añadía un tercer estado de la materia, derivado de la mezcla, la «armonía». El alma era una mezcla armónica de los elementos del cuerpo. La armonía como equilibrio del cosmos y los seres que hay en él es el concepto clave del pensamiento de Filolao, según aparece en los que se consideran sus propios textos. También es gracias a Filolao que nos ha llegado la idea pitagórica de que los números están armonizados en proporción según las tres consonancias básicas de las escalas musicales: la octava (2:1), la quinta (3:2) y la cuarta (4:3).

Platón recogió las ideas de Filolao para formar su cosmología. Convirtió los tres principios cósmicos del crotoniata en cuatro: el límite, lo indeterminado, el resultado de la mezcla (la materia del cosmos) y la causa de la mezcla (el demiurgo). El concepto platónico del cosmos estaba bañado de la idea pitagórica de armonía: el cosmos era una obra hermosa y bien acabada, la mejor obra de arte posible, un engranaje de precisión hecho de partes perfectas.

Algunos fragmentos relevantes de los diálogos de Platón parecen aludir al pitagorismo de Filolao, como el concepto de la geometría como medio para entender el cosmos. La geometría de Filolao era el fundamento de los demás saberes, el instrumento imprescindible para sistematizar el conocimiento del número. El

pitagorismo tradicional tiene tanto de platónico y Platón tanto de pitagórico, que incluso Aristóteles se preguntó quién influyó sobre quién.

ARQUITAS DE TARENTO

Arquitas de Tarento (ca. 435-347 a.C.) fue discípulo de Filolao. Ha pasado a la historia como astrónomo y matemático, pero sobre todo fue un filósofo que llevó a la práctica el ideal del sabio político. Arquitas dio origen a la idea del buen gobierno pitagórico respaldado por la acción política directa, pues, además de filósofo y científico, fue estratego (comandante en jefe militar) de Tarento siete veces (de 367 a 361 a.C.). Las fuentes le hacen responsable del esplendor de la ciudad y del triunfo de la democracia en ella. El éxito político de Tarento es un hecho histórico confirmado, y también lo es que su sistema democrático basado en la armonía social se convirtió en el máximo ejemplo de la excelencia en el gobierno y del buen resultado que podía lograr la aplicación del cálculo, las matemáticas y la geometría a la política.

El tarentino defendía la aplicación del cálculo a todas las disciplinas, en la línea de las ideas matemáticas de Filolao. Para él, a través del cálculo y su aplicación en el espacio, la geometría, se podía solucionar cualquier problema. Hablaba de la ciencia del cálculo, que estudiaba las propiedades de los números y era la base para el análisis de las proporciones, y establecía una relación entre el pensamiento lógico, la educación y la justicia. Según esta idea, el estudio de las proporciones numéricas resultaba en una mejor distribución de la riqueza y el poder en la comunidad humana. La geometría era el procedimiento didáctico para guiar el alma en todos los aspectos de la vida a través de las demostraciones del cálculo. Esta idea de la geometría ordenadora, aplicable a la astronomía, la música, los negocios o la política, se enmarcaba en un contexto histórico en que se intentaba hallar la concordia después de largos períodos de revueltas. Arquitas refundó la política pitagórica para basarla menos en el carisma de un líder y más

en la extensión de la armonía entre las clases sociales. El pensador fue el vínculo directo de los pitagóricos con Platón, pues la amistad entre ambos filósofos está bien documentada a través de su correspondencia personal.

La tradición suele presentar a Arquitas como el artífice del último florecimiento de la escuela pitagórica, mientras que la interpretación actual le identifica como el refundador del pitagorismo, que desnudó de su sentido más místico y religioso y racionalizó para convertirlo en una ciencia de ciencias, basada en las matemáticas y en la música.

El tarentino logró avances muy notables en las matemáticas que más tarde recogería y admiraría Euclides, como la demostración de las proporciones irracionales y de la irracionalidad de las raíces cuadradas, usando el máximo común divisor y el algoritmo que sería conocido como «de Euclides», aunque ya lo había empleado Arquitas.

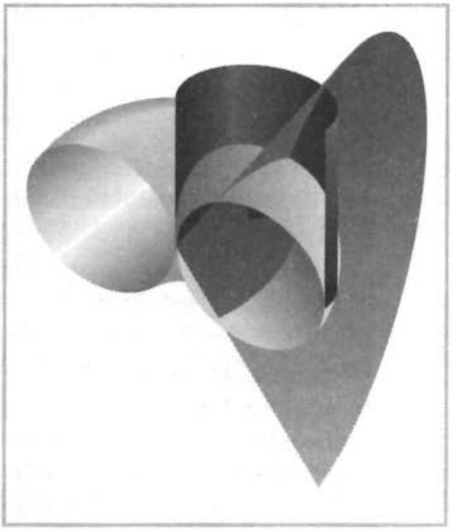
En música, intentó dotar a la armonía de una base matemática y estudió las proporciones de las consonancias de octava, quinta y cuarta. También presentó una teoría de la acústica y el sonido, cuya causa vio en el movimiento de los cuerpos en el aire y sus variaciones de velocidad, según la idea de la armonía de las esferas.

Como geómetra, hizo aportaciones puramente matemáticas. Se le atribuye la invención de una solución tridimensional al problema de la duplicación del cubo, planteado anteriormente por Hipócrates de Quíos (ca. 470-410 a.C.), gracias a su desarrollo de los estudios de geometría en el espacio tridimensional, la estereometría. Arquitas fue el primero en describir una solución geométrica de este problema, uno de los enigmas irresolubles para la construcción con regla y compás, como la cuadratura del círculo o la trisección del ángulo. La solución encontrada por Arquitas es geométricamente impecable, aunque muy complicada, pero tampoco era aceptable para los estrictos criterios griegos del uso de la regla y el compás.

Finalmente, se dice que Arquitas recogió la tradición del teorema de Pitágoras, procedente del propio maestro, aunque no hay pruebas de ello. Fue el neoplatónico Proclo (410-485) quien atri-

LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

La duplicación del cubo era también llamada el «problema délico». La leyenda que expone el problema ilustra también la visión que se tenía de Arquitas y de su idea de las matemáticas como medio para lograr la convivencia política. Cuenta la historia que la peste invadió la isla de Delos, lugar de nacimiento de Apolo, y sus habitantes acudieron al oráculo de Delfos para saber cómo librarse de ella. El oráculo respondió que debían construir un nuevo altar para Apolo con un cubo cuyo volumen fuera el doble del que ya existía. Para construirlo, los delios duplicaron las dimensiones del cubo, y consiguieron una figura con un volumen ocho veces mayor. Entonces consultaron a Platón, que les dijo que Apolo en realidad solo les lanzaba una advertencia: que se dedicaran al estudio de la geometría como solución a todos los problemas, desde la política a la medicina. Cuando el problema llegó hasta Arquitas, este fue capaz de resolverlo con su dominio de la geometría gracias a la llamada «curva de Arquitas». El tarentino había introducido la idea de considerar una curva como generada por un punto en movimiento y una superficie generada por una curva en movimiento. Usando esa idea resolvió el problema hallando dos medias proporcionales entre dos cantidades dadas. En la notación actual, dándole, para simplificar, el valor 1 a la arista del cubo, y siendo x e y tales que



Reconstrucción virtual del toro (gris claro), el cono (tono intermedio) y el cilindro (más oscuro).

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2},$$

entonces $x^2=\sqrt[3]{2}$, que es la respuesta deseada, aunque no puede construirse con regla y compás. Estas medias se construirían geométricamente hallando la intersección de tres superficies: un toro, un cono y un cilindro.

buyó el teorema al sabio de Samos en su comentario a los *Elementos* de Euclides. Tal vez Pitágoras fuera solo el padrino mítico de un hallazgo llevado a cabo por algún genio anónimo de la edad arcaica.

PLATÓN

Los filósofos situados cronológicamente entre los pitagóricos y Platón estudiaron la naturaleza de la realidad pero no emplearon las matemáticas de manera directa. Parménides, Zenón, Empédocles, Leucipo de Mileto (ca. 500-430 a.C.) y Demócrito de Abdera (ca. 460-370 a.C.), hicieron grandes afirmaciones que pocas veces basaron en la observación, pero aun así todos consideraron que la naturaleza era comprensible y que podía descifrarse a través del pensamiento. Cada uno de ellos fue un eslabón de la cadena que condujo a la investigación matemática de la naturaleza.

La influencia de las ideas pitagóricas en Platón dio enorme resonancia a las teorías sobre el número y la armonía de Filolao y a las ideas sobre geometría y política de Arquitas. Platón fue el mayor propagador de las matemáticas como medio exclusivo de comprensión de la realidad, sin duda diseñada matemáticamente. Consideraba que los sentidos nos engañan y que el conocimiento físico no es importante porque los objetos materiales son mutables. Por tanto, el estudio directo de la naturaleza y las investigaciones estrictamente físicas eran inútiles. El mundo físico es una copia imperfecta del mundo ideal, y era este el que debían estudiar los matemáticos y los filósofos. La geometría era la raíz de la física y del movimiento del cosmos hacia el bien. Su estudio era el camino para aproximarse a la divinidad.

La astronomía de Platón también parece proceder del pitagorismo. El filósofo recuperó la antigua y prestigiosa filosofía pitagórica que relacionaba el vuelo del alma con el de los astros en un movimiento circular y afirmó que el alma estaba inmersa en el giro circular de los astros en una armonía musical. La astronomía pitagórica de su tiempo, la de Arquitas, había mostrado que los plane-

PLATÓN Y LA ACADEMIA

Platón (ca. 427-347 a.C.) nació en el seno de una familia noble, y en su juventud albergó ambiciones políticas, pero pronto se convenció de que la política no era lugar para un hombre de conciencia. Viajó a Egipto y visitó a los pitagóricos en el sur de Italia. No era matemático, pero sí un entusiasta de la materia, convencido de su relevancia como ciencia de las ciencias. Algo de ello tiene que haber en el hecho de que todas las obras matemáticas importantes de su época se deban a sus amigos o sus discípulos. El filósofo fundó en Atenas la Academia, una escuela de enseñanza superior que disponía de lo que actualmente se entiende como campus, grandes terrenos que albergaban los edificios donde daban clase Platón y sus ayudantes. El estudio de la filosofía y las matemáticas fueron sus materias preferentes a lo largo del período clásico. La denominada Academia antigua fue destruida por los romanos en el año 86 a.C., pero la institución, en sus diversas reencarnaciones, alcanzó los 900 años de historia, hasta que el emperador cristiano Justiniano la clausuró en el año 529 d.C. bajo la acusación de que en ella se enseñaban conocimientos paganos y perversos.



Mosaico del siglo I d.C. procedente de Pompeya cuyos personajes, situados bajo un reloj de sol, conversan alrededor de una esfera. La tradición ha asociado esta obra a la Academia ateniense de Platón (Museo Nacional de Nápoles).

tas se movían por reglas geométricas y, en consecuencia, los planetas debían tener alma y eran divinos.

El rastro de las matemáticas pitagóricas puede encontrarse también en el proyecto educativo de Platón: la dialéctica platónica es la etapa final de una serie de disciplinas matemáticas que comienzan con la aritmética y la geometría de planos; el estudio de la música y la armonía musical, así como el movimiento matemático de los astros, son la prueba de su diseño divino. En la *República* se insiste en la relación entre la justicia y la proporción matemático-musical. Las matemáticas se convierten así en un modo de determinar que el orden natural constituye también un orden moral, ya que en todo se encuentra la presencia del número, que es la huella del origen divino del cosmos.

Pero Platón fue mucho más allá que los pitagóricos en sus sueños más atrevidos al pretender no solo descifrar la naturaleza a través de las matemáticas, sino sustituir la naturaleza por las matemáticas. Consideraba que, tras una ojeada al mundo físico para recabar algunas certezas, la razón podría continuar sin más ayuda. Desde ese punto de vista, la naturaleza no existía, solo existían las matemáticas; y la geometría sustituía a la física. Platón explicaba su postura poniendo como ejemplo la astronomía. La

IDEAS PLATÓNICAS

El punto de vista de Platón acerca de las matemáticas formaba parte integral de su filosofía, que afirmaba que existía una realidad objetiva constituida de formas e ideas, y que, en verdad, esta era la única realidad. Las ideas platónicas eran independientes de los seres humanos, inmutables, eternas e intemporales. Habían llegado a nosotros por la reminiscencia, algo así como un recuerdo latente, pues, aunque estaban presentes en el alma, debían ser estimuladas para hacerlas resurgir. Eran la bondad, la verdad, la justicia, la belleza... Las ideas matemáticas estaban comprendidas dentro de esas ideas, pero ocupaban una posición inferior, ya que suponían un estado intermedio entre el mundo sensible y las ideas superiores. En esta filosofía, las matemáticas tenían un papel doble: por un lado formaban parte de la realidad y por otro ayudaban a organizar la mente para alcanzar las ideas eternas.

ordenación de las estrellas en el cielo y sus movimientos eran hermosos, pero la astronomía debía tratar de las leyes del movimiento de las estrellas en un cielo matemático. Platón animaba a la astronomía teórica. Las figuras del cielo debían ser solo diagramas para ayudar a la investigación de verdades superiores.

LA CRÍTICA DE ARISTÓTELES A PLATÓN Y LOS PITAGÓRICOS

Aunque adoptó inicialmente ideas de su maestro Platón, Aristóteles tenía una idea tan distinta sobre la realidad y la relación entre las matemáticas y la naturaleza que casi podría decirse que tenían pensamientos opuestos. En su obra *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, el prestigioso historiador y divulgador de las matemáticas Morris Kline caracteriza a Aristóteles como un físico frente a Platón. Aristóteles creía en las cosas materiales como sustancia primera y origen de la realidad. Para él, el mundo era materia y forma. La materia era indeterminada y solo se convertía en algo cuando se organizaba en una forma concreta. Así, los hechos interesantes de la realidad, que debían ser motivo de estudio científico, eran la forma y el cambio de la materia. La ciencia debía estudiar el mundo físico. Obviamente, Aristóteles no podía más que criticar el mundo de Platón y su reducción de la ciencia a las matemáticas, y lo hizo en su obra capital, la *Metafísica*.

La celebérrima *Metafísica* de Aristóteles es un compendio de catorce libros que tradicionalmente se han editado como un tratado unitario, cuando en realidad son escritos independientes agrupados más tarde. Su objetivo no era la lectura sistemática, sino servir de apoyo a la enseñanza, de modo que cada libro era una serie de lecciones sobre un tema concreto. El Libro I era la introducción al curso. En él, Aristóteles explicaba qué es la sabiduría y cómo se adquiere. Los capítulos 1 y 2 versaban sobre las causas y los principios primeros. A partir del capítulo 3, el estagirita exponía las doctrinas de los filósofos anteriores y las criticaba por insu-

ficientes, a la vez que presentaba su propia teoría. La crítica de los pitagóricos se encuentra en el capítulo 5, donde se establece un paralelismo entre el pensamiento pitagórico y la filosofía eleata.

«Los llamados pitagóricos, que fueron los primeros en cultivar las matemáticas, no solo hicieron avanzar a estas, sino que, nutridos de ellas, creyeron que sus principios eran los principios de todos los entes.»

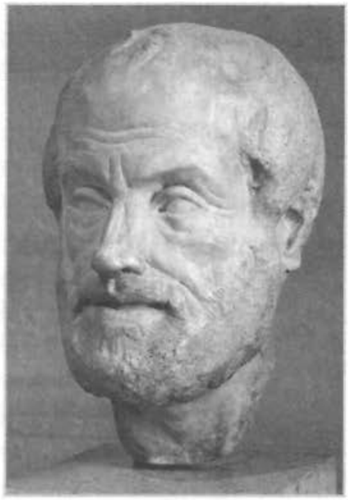
— Aristóteles, *Metafísica*, Libro I.

Fue Aristóteles quien presentó la llamada «lista pitagórica de los contrarios», diez pares de opuestos que suponían los elementos del universo. Tal y como lo expone el estagirita, los pitagóricos empleaban estos opuestos para señalar todos los fenómenos que se originaban por la interacción de dos fuerzas cósmicas o principios antagónicos.

> Parece que también estos [los llamados pitagóricos] consideran que el Número es principio, no solo como materia para los entes, sino también como afecciones y hábitos, y que los elementos del número son lo Par y lo Impar, siendo uno de estos finito y el otro infinito, y que el Uno procede de estos dos elementos (pues dicen que es par e impar), y que el número procede del Uno, y que el cielo entero, según queda dicho, es números. Pero otros, entre estos mismos, dicen que hay diez principios, que enumeran paralelamente: Finito e Infinito, Impar y Par, Uno y Pluralidad, Derecho e Izquierdo, Masculino y Femenino, Quieto y En movimiento, Recto y Curvo, Luz y Oscuridad, Bueno y Malo, Cuadrado y Oblongo.

¿Qué lugar tenía la matemática en el universo aristotélico, que tan crítico se había mostrado con los pitagóricos a través de Platón? Las matemáticas ayudaban a la física a describir propiedades como la forma y la cantidad, y proporcionaban explicaciones de hechos observados en fenómenos materiales, pero eran una abstracción del mundo real. Los objetos matemáticos existían en la mente humana y no tenían una realidad independiente.

ARISTÓTELES Y LAS MATEMÁTICAS



Aristóteles (384-322 a.C.) nació en Estagira, en la Macedonia griega. Durante cerca de veinte años fue discípulo de Platón y durante tres, del 343 al 340 a.C., fue tutor de Alejandro Magno. En el año 335 a.C. fundó su propia escuela, el Liceo, que contaba con un jardín, un aula y un altar dedicado a las Musas. El estagirita escribió sobre numerosos temas, tanto en el terreno de las ciencias como en el de las letras, y aunque no dedicó ningún libro específico a las matemáticas, la materia aparecía constantemente en sus textos, pues la usaba para presentar ejemplos. De este modo, se ocupó de los principios básicos, distinguiendo entre los axiomas o las nociones comunes, que son verdades comunes a todas las ciencias, y los postulados, que son primeros principios aceptables para una ciencia concreta. Pero uno de sus logros más importantes fue la fundación de la ciencia de la lógica. Los griegos habían puesto los cimientos de la disciplina al producir razonamientos matemáticos correctos, pero Aristóteles sistematizó en una materia independiente las leyes que siguen esos razonamientos.

Aunque las matemáticas podían proporcionar muchas definiciones, no podían decir nada sobre diferencias cualitativas. Los distintos colores, por ejemplo, no podían reducirse a diferencias geométricas. Aristóteles distinguía formalmente entre matemáticas y física, y ponía una al servicio de la otra.

LA HERENCIA PITAGÓRICA

El pitagorismo fue renovado a partir del siglo I a.C. y ejerció notable influencia durante los tres siglos siguientes en una forma tar-

día que se conoce como «neopitagorismo». Los neopitagóricos recuperaron la figura de Pitágoras, considerándolo el fundador de su forma de pensamiento, y proclamaron a menudo su autenticidad, asegurando que pretendían revivir las doctrinas pitagóricas. No obstante esta ambición de pureza, además de las doctrinas puramente pitagóricas, en el neopitagorismo se dan cita elementos platónicos, aristotélicos, estoicos y orientales.

Las ideas neopitagóricas se encuentran tan dispersas en fuentes tan dispares que es difícil reducirlas en un sistema único. Las principales tesis comunes a todos los pensadores neopitagóricos son las siguientes:

— La realidad suprema es una unidad, de la que la unidad numérica es una manifestación.

— Esta unidad engendra las realidades restantes por medio de movimiento, que más tarde se describirá como «emanación».

— La unidad es absolutamente pura y trascendente.

El neopitagorismo fue tan solo un tímido refluir, sin especial calado, de la herencia pitagórica en la historia de la ciencia y el pensamiento. Pero los efectos de aquellas antiguas doctrinas serían muchos y duraderos. Desde los tiempos de los pitagóricos, los más importantes filósofos y científicos que moldearon el mundo intelectual griego, sobre todo durante el período helenístico, especularon con el diseño matemático de la naturaleza. La teoría quedó establecida durante el período clásico, y la investigación de las leyes matemáticas quedó institucionalizada. La mayoría de los grandes matemáticos aceptaron aquellas ideas y las siguieron concienzudamente. La doctrina imperó hasta finales del siglo XIX, y durante todo ese tiempo la investigación del diseño matemático se identificó con la búsqueda de la verdad. Algunos griegos, como Ptolomeo, sostenían que las teorías matemáticas eran solo intentos humanos de proporcionar una descripción coherente del mundo, pero la convicción en que las leyes matemáticas conte-

nían la verdad natural atrajo hasta las matemáticas a los científicos y pensadores más importantes de la historia.

Dice la tradición que los pitagóricos fueron los primeros en llamar *kosmos* al universo y en entenderlo como un orden regido por leyes matemáticas. De ser así, este logro ya bastaría para situarlos en un lugar preferencial en el Olimpo del conocimiento humano. Por la originalidad y la potencia de su pensamiento, no es extraño que aquellos sorprendentes personajes —políticos, matemáticos, filósofos, pero también magos y ascetas— influyeran en la obra de Platón y de Aristóteles, y a través de estos, en todos los grandes pensadores, filósofos y científicos de la humanidad. Las doctrinas y la ciencia de los pitagóricos imprimieron una huella tan intensa en la historia de la cultura occidental que puede considerarse a Pitágoras como uno de los hombres más influyentes en el campo del pensamiento, lo que le da el triunfo en su objetivo más ansiado: alcanzar la inmortalidad. Y esta victoria, aunque simbólica, certifica la fuerza de su genio, porque Pitágoras, como dijo Bertrand Russell, fue tan sabio que acertó hasta cuando estaba equivocado.

Lecturas recomendadas

ALSINA, C., *La secta de los números: el teorema de Pitágoras*, Barcelona, RBA, 2010.

ARBONÉS, J., MILRUD, P., *La armonía es numérica: música y matemáticas*, Barcelona, RBA, 2010.

CAPELLE, W., *Historia de la filosofía griega*, Madrid, Gredos, 1992.

ELIADE, M., *Historia de las creencias y las ideas religiosas* (vol. II), Barcelona, RBA, 2005.

FERRATER MORA, J., *Diccionario de filosofía*, Barcelona, RBA, 2005.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M., *Pitágoras: el filósofo del número*, colección «La matemática en sus pesonajes», Madrid, Nivola, 2001.

HERNÁNDEZ DE LA FUENTE, D., *Vidas de Pitágoras*, Girona, Ediciones Atalanta, 2011.

KLINE, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días* (vol. I), Madrid, Alianza Editorial, 1992.

RUSSELL, B., *Historia de la filosofía*, Barcelona, RBA, 2005.

WUSSING, H., *Historia de las matemáticas*, Barcelona, RBA, 2010.

Índice

Academia 13, 51, 155
acusmáticos 64, 70, 147
agrimensura 41, 43, 91
Ahmes, papiro de 86
álgebra geométrica 51, 100
alimentación 64, 66, 67
Anaximandro de Mileto 10, 18-20, 91, 93
ángulo 11, 20, 36, 38, 43, 50, 52, 83, 93, 102, 143, 152
Anti-Tierra 123
Apolo 19, 21, 30, 66, 71, 153
Arezzo, Guido d' 120
Aristóteles 9, 13, 79, 92, 94, 120, 143, 147-149, 151, 157-159, 161
aritmética 10, 11, 45, 80, 82, 84, 85, 90, 91, 95-97, 105, 107, 118, 119, 121, 122, 127, 134, 135, 138, 140, 141-143, 148, 156
Arquitas de Tarento 9, 13, 76, 93, 145, 147, 151-154
    curva de 153
Asia Menor 8, 17, 31, 90, 91
astronomía 9, 17, 22, 83, 91, 92, 97, 110, 121, 122, 148, 151, 154, 156, 157

Babilonia 22, 23, 38, 82, 91, 139
Berlín, papiros de 42
Boecio 120, 141
Buda 88

cálculo
    de áreas 86
    funcional 55
cambio de camino 135, 137
cateto 11, 36, 37, 40, 41, 45, 47-49, 52, 54, 56, 57, 59, 133, 137
cent 114, 115
cero 23, 89, 96, 130, 131
chamanismo 8, 30-32
Chou Pei Suan Ching 45, 46
Chui Chang Suang Shu 47
Cilón 29, 76
círculo de quintas 116, 117
Ciro II el Grande 23, 82
colonización griega 61, 72, 73
contrarios pitagóricos 158
coseno 43, 55, 56
    ley del 59
cosmología 10, 20, 21, 63, 107, 123, 125, 148, 150
cosmos 20, 96, 98, 107, 110, 126, 127, 138, 148, 150, 154, 156
Creta 21, 71
Crotona 8, 13, 17, 18, 25, 26, 29, 30, 68, 71-76, 145, 147, 148, 150

cuneiforme, escritura 38, 39, 82, 83

década pitagórica 96-99
Delfos, oráculo de 19, 64, 70-72, 153
Demócrito de Abdera 20, 154
díada 97, 103
diagrama de la hipotenusa 45
Diógenes Laercio 66, 74
Dioniso 21, 22, 24
Discurso sagrado 68
duplicación del cubo 143, 152, 153

Egipto 20-25, 38, 41, 42, 45, 64, 71, 72, 79, 85, 91, 92, 149, 155
Elea 13, 17, 24
Elementos de geometría 13, 39, 47, 49-54, 103, 136-138, 154
Empédocles de Agrigento 17, 18, 20, 154
esotéricos 65
ética pitagórica 9, 63, 73
Euclides 13, 39, 47, 49, 50-53, 103, 118, 136-138, 143, 149, 152, 154
Eudoxo 51, 140
exotéricos 65

Ferécides de Siros 19, 24
Filolao de Crotona 9, 13, 68, 76, 93, 145, 147, 148-151
física 10, 148, 154, 156, 158, 159
fracción 23, 80, 90, 114, 118, 127, 129, 130, 133, 135, 138, 140
fuego central 11, 123, 124, 148

geometría 11, 13, 17, 22, 35, 39, 43, 47, 49, 50, 51, 85, 90, 97, 107, 122, 133, 134, 138, 140-143, 150-154, 156
gnomon 45, 102

Hammurabi 38, 39, 82
Heráclito de Éfeso 20
Heródoto 24, 42, 92
Hipaso de Metaponto 13, 132, 133
    pentagrama de 135-137
hipotenusa 11, 36, 37, 40, 41, 45, 47, 48, 52, 54, 57, 133, 137, 138
Homero 28, 32

Imperio persa 23, 25, 72, 82, 93
inconmensurables, números 11, 13, 119, 127, 132, 133, 135-140, 142
India 22, 24, 44, 45, 88, 89
inmortalidad del alma 9, 19, 24, 28, 63, 66, 161

Jámblico de Calcis 52, 68
Jenófanes de Colofón 13, 20
Jonia 13, 24, 91, 93

Kepler, Johannes 126
Kon Ku 45

Leonardo da Vinci 54, 141
Liu Hui 45, 47

Magna Grecia 8, 13, 24, 25, 61, 76, 133
matemáticos 7, 8, 11, 23, 33, 35, 42, 45, 59, 64, 79, 81-85, 88, 89, 94, 110, 130, 131, 134, 142, 147, 149, 154, 158, 160, 161
media
    aritmética 97, 105, 119
    armónica 11, 105, 119
    geométrica 105, 119
Mesopotamia 23, 38, 79, 81-85, 88, 123, 129, 149
Metafísica 13, 94, 147, 157, 158
Metaponto 13, 18, 30, 75, 76, 132, 133
milagros de Pitágoras 30, 121
Mileto 18, 25, 91, 93
Milón 29, 75
misterios 21, 24, 31, 32, 85
misticismo 7, 11, 22, 96, 98, 99, 119, 125
mito 15, 17, 21-26, 29, 30
Mnesarco 18, 19
molino de viento 50, 54, 57
monocordio 112, 125

Moscú, papiro de 42, 85, 87
música de las esferas 11, 107, 121-124

neopitagorismo 145, 160-161
números
clasificación de los 99, 103, 105, 130
enteros 23, 90, 100, 112, 113, 118, 127, 129-135, 142
irracionales 130-133, 137, 138, 140, 142, 143
poligonales 99-102
racionales 129-131

octava musical 11, 113-120, 150, 152
Orfeo 21, 22, 24, 68

Parménides de Elea 17, 18, 20, 24, 71, 154
pentalfa 98, 99
Platón 9, 13, 21, 28, 51, 68, 120, 134, 140, 148-157, 159, 161
Plimpton, tablilla 39
Polícrates 8, 13, 18, 25, 72
poliedros regulares 51, 97
polígonos 50, 57, 97, 99
política pitagórica 8, 9, 25, 26, 29, 68, 71-76, 151, 152
posicional, sistema numérico 23, 83, 84, 89, 90, 131
presocráticos, filósofos 17, 20, 150
Proclo 51, 152
progresión armónica 11
proporción
áurea 50, 113
musical 105, 125
perfecta 105

quadrivium 97, 122

raíz cuadrada 35, 44, 50, 138-140, 152
reencarnación, teoría de la 19, 24, 63, 67, 98, 155
reglas de vida pitagórica 63, 64, 71, 73, 132
República 156
revuelta antipitagórica 13, 29, 75-76
Rhind, papiro 41-44, 85, 86

Samos 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17-21, 24, 25, 27, 28, 30, 33, 64, 68, 71, 79, 110, 129, 145, 154
secta 8, 13, 15, 20, 26, 29, 61, 64-68, 73, 74, 76, 110, 133, 148, 149
Semicírculo 13, 25, 71
seno 43, 55, 56
Síbaris 13, 26, 29, 75
Sulvasutra 44, 45, 90
sumerios 39, 81

tablilla de arcilla 23, 38, 39, 82, 85, 87, 139
tabúes pitagóricos 29, 66-67
Tales de Mileto 18-20, 79, 91-93
teorema de 92, 93
teorema de Pitágoras 11, 27, 33, 35, 37, 38, 42, 44-48, 50, 52, 54, 56, 57, 59, 60, 90, 92, 127, 131, 133, 134, 137, 141, 152
demostraciones del 45-54
inverso del 52
ternas pitagóricas 38-42, 44, 45, 132
tetraktys 70, 99
topografía 43, 56
tríada 97
triangulación 43
triángulo egipcio 42
trigonometría 35, 39, 40, 43, 55, 56
trivium 122

versos de oro 68, 99
voto de silencio 65

Zenón de Elea 20, 24, 71, 154
Zhao Shuang 45